Fiche méthode : nombres complexes sous la forme exponentielle

Écriture algébrique : $z = a + \mathrm{i}b$, où a est la partie réelle et b la partie imaginaire.
Écriture exponentielle : $z = \rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\rho = |z|$ (module de z) et $\theta = \arg(z)$ (argument de z).

I. Pour passer z de la forme algébrique à la forme exponentielle, il suffit dons de calculer le module et un argument de z.

Pour le module : $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Pour un argument :

Cas général :

θ vérifie : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$.

On utilise ensuite le tableau des valeurs particulières des cos et sin pour retrouver l'angle de départ.

Réel x	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos *x*	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin *x*	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Cas simples :

Si le point image de z se trouve sur l'une de ces 8 demi-droites colorées, on peut directement conclure en écrivant ce qui est écrit sur la demi droite pour justifier.

- **si $b = 0$** alors

si $a > 0$, alors $z \in \mathbb{R}^{+*}$ et on a donc $\arg(z) = 0$

si $a < 0$, alors $z \in \mathbb{R}^{-*}$ et on a donc $\arg(z) = \pi$

- si **$a = 0$** alors

si $b > 0$, M $\in [0\,;\ \vec{v}\,)$ et on a donc $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}$

si $b < 0$, M $\in [0\,;\ -\vec{v}\,)$ et on a donc $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{2}$

- **si $a = b$** alors

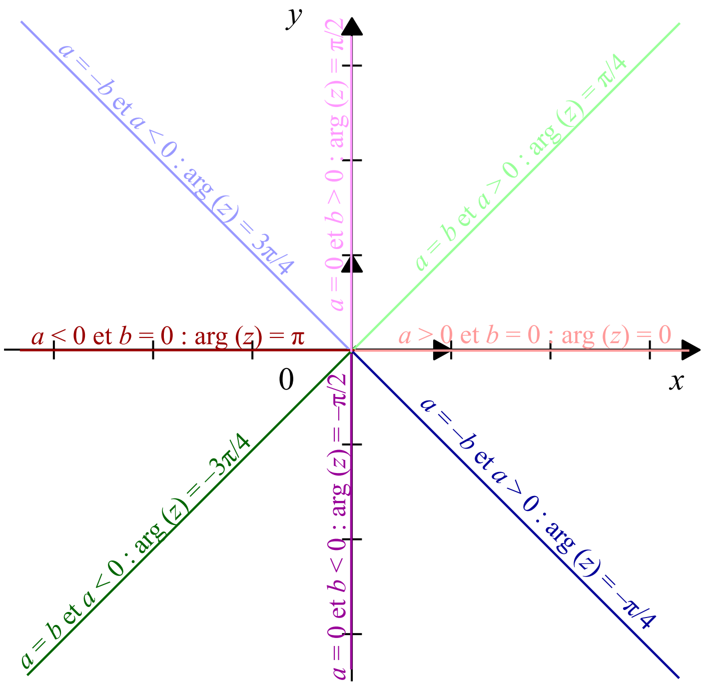
si a et b sont positifs, $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4}$

si a et b sont négatifs $\arg(z) = -\dfrac{3\pi}{4}$

- **si $a = -b$** alors

si $a > 0$, $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{4}$

si $a < 0$, $\arg(z) = \dfrac{3\pi}{4}$.



Exemples :

$\arg(1 + \mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{4}$; $\arg(2\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{2}$; $\arg(3) = 0$; $\arg(-2 + 2\mathrm{i}) = \dfrac{3\pi}{4}$.

II. Pour passer z de la forme exponentielle à la forme algébrique, il suffit de remplacer $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ par $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ et de calculer

Passage de la forme exponentielle à la forme algébrique :

$$z = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = 4\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = 4\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = -2\sqrt{2} + 2\mathrm{i}\sqrt{2}\ .$$