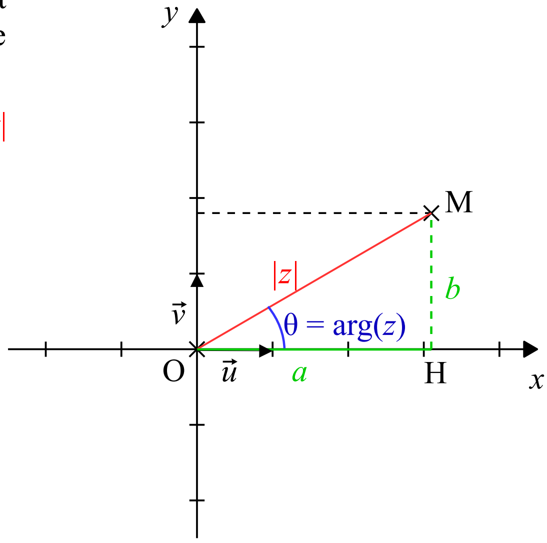
NOMBRES COMPLEXES :
FORME EXPONENTIELLE

I. Rappels :

Forme algébrique : $z = a + \mathrm{i}b$ où a et b sont des réels. a est la partie réelle de z, et b est sa partie imaginaire. On note $b = \mathrm{Im}\,(z)$.

Le module du complexe $z = a + \mathrm{i}b$ est le réel positif noté $|z|$ tel que $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Soit θ un argument de z, $\arg(z) = \theta$, alors



- $\theta = (\vec{u}\,,\ \overrightarrow{OM}\,)$ à 2π près
- θ vérifie : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$.

Forme trigonométrique : si $|z| = \rho$, $z = \rho\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$.

Sur le graphique, M est le point image de z et z est l'affixe de M.

Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$ est $\bar{z} = a - \mathrm{i}b$.

Pour calculer le quotient de deux nombres complexes, on multiplie le numérateur et le dénominateur de l'expression par le conjugué du dénominateur (ainsi le dénominateur devient un nombre réel positif).

II. Forme exponentielle d'un nombre complexe :

1°) Définition :

Définition :

- Le nombre complexe de module 1 et d'argument θ est noté $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.
- Tout nombre complexe non nul admet une forme exponentielle : $z = \rho\, e^{\mathrm{i}\theta}$ où $\rho = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.

Remarque :

La forme $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ (forme trigonométrique) correspond bien à un nombre de module 1 :

$\mathrm{Re}\,(z) = \cos(\theta)$, $\mathrm{Im}\,(z) = \sin(\theta)$ donc $|z| = \sqrt{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)} = \sqrt{1} = 1$.

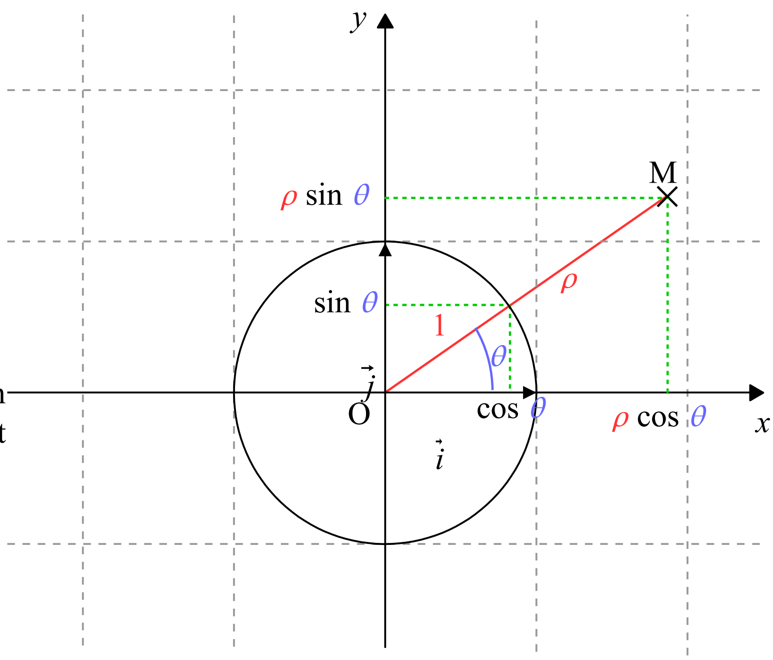
Exemples :

- $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$;
- $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}$.

2°) Représentation graphique :

Rappel :

Comme l'illustre le schéma ci-contre, dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, si z est l'affixe du point M, $|z| = \rho = \mathrm{OM}$ et $\arg(z) = \theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$



Propriété : valeurs particulières :

$1 = e^{0i}$; $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$; $-1 = e^{i\pi}$; $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

Exemple 1 :

Passage de la forme algébrique à la forme exponentielle :

$z = 1 + i$

$|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ (cas où $a = b > 0$)

Donc $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Exemple 2 :

Passage de la forme exponentielle à la forme algébrique :

$z = 4e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$z = 4\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

$z = 4\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

$z = -2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}$.

3°) Propriétés :

Propriétés :

- Si $z = \rho\, e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$, alors $\bar{z} = \rho\, e^{-i\theta}$.
- Les propriétés de l'exponentielle réelle s'étendent à l'exponentielle complexe :

  Pour tous θ et θ' de $\mathbb{R}$, tous ρ et ρ' de $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$:

  - $\rho\, e^{i\theta} \times \rho'\, e^{i\theta'} = \rho\,\rho'\, e^{i(\theta+\theta')}$;
  - $\rho\left(e^{i\theta}\right)^n = \rho^n\, e^{in\theta}$;
  - $\dfrac{1}{\rho\, e^{i\theta}} = \dfrac{1}{\rho}\, e^{-i\theta}$;
  - $\dfrac{\rho\, e^{i\theta}}{\rho'\, e^{i\theta'}} = \dfrac{\rho}{\rho'}\, e^{i(\theta-\theta')}$.

Exemples :

- Soit $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$, alors :
- $z_1 z_2 = 2\times2\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)} = 4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} = 4\sqrt{3}i$;
- $z_2^4 = (2\sqrt{3})^4 e^{i\frac{4\pi}{6}} = 144e^{i\frac{2\pi}{3}}$;
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2}{2\sqrt{3}}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Remarque :

La forme exponentielle fait apparaître clairement le module et l'argument du nombre. On vient de voir que lorsqu'on multiplie deux nombres complexes les modules se multiplient et les arguments s'ajoutent, lorsqu'on divise des nombres complexes, les modules se divisent et les arguments se soustraient. On préférera donc cette forme pour les calculs de produits ou de quotients.

Pour les calculs du type "somme" ou "différence", on utilisera la forme algébrique.

III. Formules d'addition et de duplication :

1°) Formules d'addition :

Propriétés :

(i) $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

(ii) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

(iii) $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

(iv) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Preuve :

On a : $e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib}$, qui s'écrit, en utilisant les formes trigonométriques :

$\cos(a + b) + i \sin(a + b) = (\cos(a) + i \sin(a))(\cos(b) + i \sin(b))$

puis en développant le membre de droite :

$\cos(a + b) + i \sin(a + b) = \cos(a) \cos(b) + i \cos(a)\sin(b) + i \sin(a) \cos(b) + i^2 \sin(a) \sin(b)$

puis en utilisant $i^2 = -1$:

$\cos(a + b) + i \sin(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) + i (\cos(a) \sin(b) + \sin(a) \cos(b))$

On obtient donc en identifiant les parties réelles (respectivement les parties imaginaires), les formules « d'addition » :

$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$

$\sin(a + b) = \cos(a) \sin(b) + \sin(a) \cos(b)$

Pour les deux dernières formules, on sait que $a - b = a + (-b)$ et que $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$, donc $\cos(a - b) = \cos(a + (-b)) = \cos(a) \cos(-b) - \sin(a) \sin(-b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$

et

$\sin(a - b) = \sin(a + (-b)) = \cos(a) \sin(-b) + \sin(a) \cos(-b) = -\cos(a) \sin(b) + \sin(a) \cos(b)$

$= \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)$

Exemple 1 :

On remarque que $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ (en réduisant au même dénominateur), donc, d'après les formules d'addition :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

2°) Formules de duplication :

Propriété :

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$;
- $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$.

Preuve :

D'après les formules d'addition :

$\cos(2a) = \cos(a + a) = \cos(a) \cos(a) - \sin(a) \sin(a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$ et

$\sin(2a) = \sin(a + a) = \cos(a) \sin(a) + \sin(a) \cos(a) = 2 \sin(a) \cos(a)$.

Remarque :

En se souvenant que $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$, et donc que $\cos^2(a) = 1 - \sin^2(a)$ et $\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a)$, on peut écrire :

$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$.

Exemple :

Si un angle θ est tel que $\cos\theta = \frac{4}{5}$ et $\sin\theta = \frac{3}{5}$, alors

$\cos 2\theta = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$ et $\sin 2\theta = 2\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5} = \frac{24}{25}$.

IV. Transformer $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ en $A\cos(\omega t + \varphi)$ $(A > 0)$:

Méthode détaillée sur un exemple :

• Soit la fonction f, définie sur ℝ par

$f(t) = \sqrt{3}\cos(2t) + \sin(2t)$.

• Il s'agit bien d'une fonction de la forme :

$f(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$,

avec $a = \sqrt{3}$, $b = 1$ et $\omega = 2$.

• On s'intéresse à $z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.

• On s'intéresse à $z = a - \mathrm{i}b$.

→ $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$

→ On calcule $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

→ Donc, si $\varphi = \arg z$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ \sin\varphi = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \text{ donc } \varphi = -\frac{\pi}{6}.$$

→ et on cherche un argument φ de z en utilisant :

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\varphi = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{|z|} \end{array}\right.$$

• On a alors $|z|\cos(\omega t + \varphi)$

$= 2\cos(2t - \frac{\pi}{6})$

$= 2\left(\cos(2t)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin(2t)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= 2\left(\cos(2t)\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin(2t)\times\frac{1}{2}\right)$

$= \sqrt{3}\cos(2t) + \sin(2t)$

• On calcul $|z|\cos(\omega t + \varphi)$