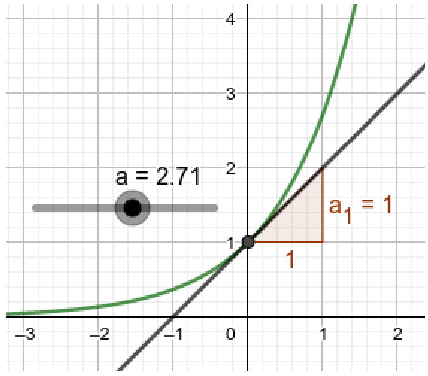
LA FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE E

I. Approche :



On cherche une fonction exponentielle de base a (a à déterminer), c'est-à-dire définie par $f(x) = a^x$, telle que la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 ait un coefficient directeur égal à 1.

La manipulation de GeoGebra fait apparaître une valeur de a proche de 2,71.

II. Définition

1°) Nombre e :

Définition :

Le nombre e est un nombre irrationnel (comme π), mémorisé sur la calculatrice en touche 

. Valeur approchée e ≈ 2,718 à 10^{-3} près. Ce nombre est appelé nombre d'Euler.

2°) Fonction exponentielle de base e :

Définition :

La fonction exponentielle de base e est définie sur ℝ par $f(x) = e^x$.

Remarques :

• Comme e > 1, la fonction f ainsi définie est croissante.

• C'est la seule fonction exponentielle qui admet une tangente de coefficient directeur égal à 1 au point d'abscisse 0 : $f'(0) = 1$.

• Fonction accessible sur la calculatrice via les touches : 

• On peut rencontrer la notation $\exp(x) = e^x$.

III. Propriétés :

On retrouve des propriétés communes aux fonctions exponentielles et des propriétés propres à e^x.

Valeurs particulières : $e^0 = 1$; $e^1 = e \approx 2{,}718$; $e^{-1} = \dfrac{1}{e}$; $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

Propriétés algébriques :

$e^x \times e^y = e^{x+y}$; $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$; $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$; $(e^x)^n = e^{nx}$; $e^{\frac{x}{2}} = \sqrt{e^x}$

Propriétés de la fonction exponentielle :

• $f(x) = e^x$ est strictement croissante et strictement positive ($e^x > 0$ pour tout réel x).

Ainsi $e^a \leqslant e^b$ équivaut à $a \leqslant b$: les inégalités sont conservées par la fonction exponentielle (car elle est croissante).

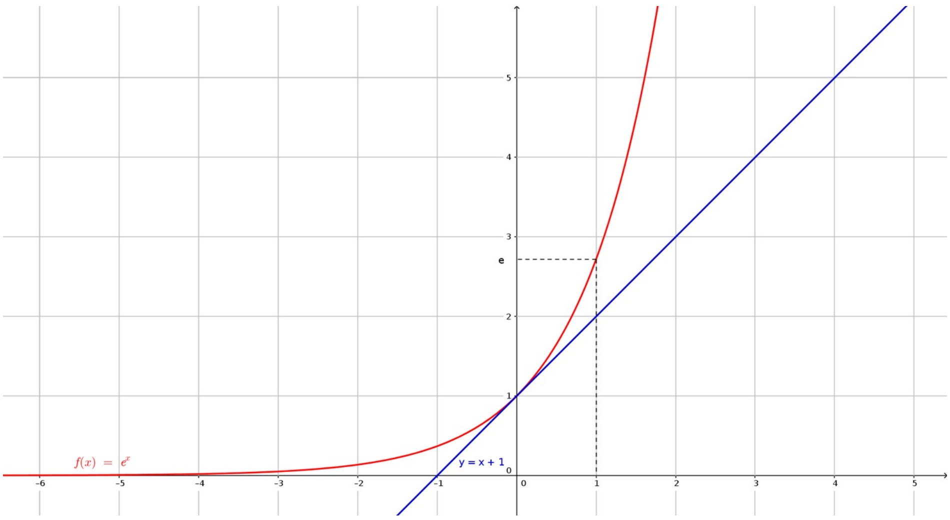
• $f(x) = e^x$ est dérivable sur ℝ et $f'(x) = e^x$.

• Limites (conjectures en observant un tableau de valeurs) : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

- Tableau de variation complet :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x) = \mathrm{e}^x$	$+$	
$f(x) = \mathrm{e}^x$	0	$+\infty$

- Courbe :



Exemple 1 :

A) Calcul de la dérivée (pour x réel) et de la limite en $+\infty$:

$g(x) = (1 - x)\mathrm{e}^x$. $g(x)$ est de la forme uv, avec $u(x) = 1 - x$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$, donc $u'(x) = -1$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$.

Donc $g' = u'v + uv'$, soit $g'(x) = -1\times\mathrm{e}^x + (1 - x)\mathrm{e}^x = -x\mathrm{e}^x$ (en factorisant par e^x).

Pour la limite :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty\end{array}\right\} \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty} (1-x)\mathrm{e}^x = -\infty.$$

Exemple 2 :

Étudions la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - 2\mathrm{e}^x$.

Commençons par calculer sa dérivée : $f'(x) = -2\mathrm{e}^x$.

Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $f'(x) < 0$ et donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} -2\mathrm{e}^x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-2\mathrm{e}^x = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -2\mathrm{e}^x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-2\mathrm{e}^x = -\infty$.

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	1	$-\infty$

Exemple 3 :

Déterminons l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe de la fonction f de l'exemple précédent au point d'abscisse 0 :

$\mathcal{T}$ a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

$f(x) = 1 - 2e^x$ donc $f(0) = 1 - 2e^0 = 1 - 2 = -1$ et $f'(x) = -2e^x$ donc $f'(0) = -2e^0 = -2$.

Donc $\mathcal{T} : y = -2(x - 0) + (-1)$ soit $y = -2x - 1$.

Exemple 4 :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x - 1 > 0$. Cette inéquation revient à $e^x > 1$ c'est-à-dire $e^x > e^0$.

Comme la fonction exponentielle est croissante, $e^x > e^0$ revient à $x > 0$.

IV. Croissances comparées :

Propriété :

Pour tout entier naturel n : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$.

Remarque :

La fonction exponentielle est prépondérante face à une fonction polynôme.

Exemples :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 3}{x^3} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + 2xe^{-x} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} 3 - \dfrac{e^x}{x^2} = -\infty$.

V. Fonctions du type $g(x) = e^{kx}$, k réel :

1°) Signe :

Propriété :

Pour tout nombre réel k et tout réel x, e^{kx} est un réel positif.

Exemples :

e^{-x} ; e^{3x} ; e^{-5x} sont des nombres positifs. Donc : $2 + e^{-x} > 0$; $-5e^{3x} < 0$; $-e - e^{-5x} < 0$.

2°) Dérivée :

Propriété :

$g(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = ke^{kx}$.

Exemples :

- Soit f la fonction définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}$. Alors $f'(x) = -e^{-x}$.
- Soit g la fonction définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2x - 1)e^{3x}$.

  g est de la forme uv, avec $u(x) = 2x - 1$ et $v(x) = e^{3x}$, donc $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 3e^{3x}$.

  Donc $g' = u'v + uv'$, soit $g'(x) = 2e^{3x} + (2x - 1)\times 3e^{3x} = 2e^{3x} + (6x - 3)e^{3x} = (6x - 3 + 2)e^{3x} = (6x - 1)e^{3x}$.

3°) Variations et limites :

Propriété :

Si $k > 0$: $x \longmapsto e^{kx}$ est croissante ; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{kx} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{kx} = +\infty$;

Si $k < 0$: $x \longmapsto e^{kx}$ est décroissante ; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{kx} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{kx} = 0$.