FONCTION INVERSE

I. Fonction inverse :

1°) Définition :

Définition :

Tout nombre réel non nul a un inverse.

On appelle fonction inverse la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ (c'est-à-dire $]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$, ou encore $\mathbb{R}-\{0\}$).

2°) Dérivée et sens de variation :

Propriété (admise) :

La fonction inverse, définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Conséquence :

Comme x^2 est toujours positif, f' est négative, nous pouvons en déduire le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	↘	‖	↘

Remarque :

La fonction inverse est donc décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, mais on ne peut pas dire qu'elle est décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

3°) Courbe représentative :

Propriété :

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$.

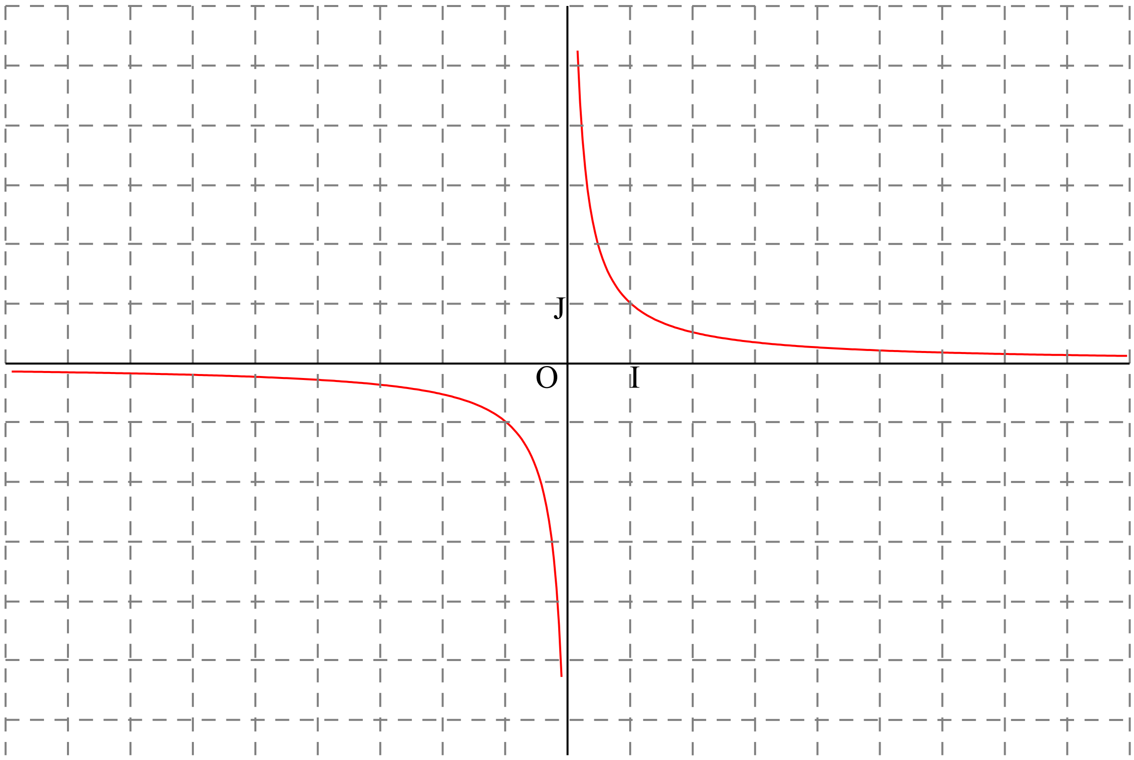
On dit alors que cette fonction est impaire, ce qui signifie que deux nombres opposés ont des images opposées : $f(-x) = -f(x)$.

Conséquence :

Graphiquement, cela signifie que l'origine du repère est centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction inverse.

Pour construire la courbe, on va choisir quelques valeurs positives de x, puis on complétera le tracé par symétrie par rapport à l'origine du repère, ici O :

x	0,25	0,5	1	2	4
$f(x)$	4	2	1	0,5	0,25



Cette courbe s'appelle une **hyperbole**. Le point O s'appelle le centre de l'hyperbole et est donc centre de symétrie de l'hyperbole.

II. Limites et asymptotes :

1°) En $+\infty$ et $-\infty$:

Limite en $+\infty$:

$$f(10^6) = \frac{1}{10^6} = 10^{-6}\ ;\ f(10^9) = \frac{1}{10^9} = 10^{-9}\ ;\ f(10^{20}) = \frac{1}{10^{20}} = 10^{-20}.$$

Quand x devient très grand, $f(x)$ devient de plus en plus proche de 0, et on peut le rendre aussi proche de 0 que l'on veut en choisissant un x suffisamment grand. On dit que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, ou que la limite de $f(x)$ en $+\infty$ est 0 et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Limite en $-\infty$:

$$f(-10^6) = -\frac{1}{10^6} = -10^{-6}\ ;\ f(-10^9) = -\frac{1}{10^9} = -10^{-9}\ ;\ f(-10^{20}) = -\frac{1}{10^{20}} = -10^{-20}.$$

Quand x devient très grand dans les négatifs, $f(x)$ devient de plus en plus proche de 0 (en restant négatif), et on peut le rendre aussi proche de 0 que l'on veut en choisissant un x suffisamment grand dans les négatifs. On dit que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$, ou que la limite de $f(x)$ en $-\infty$ est 0 et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Remarque :

Ces limites sont ajoutées dans le tableau de variation de la fonction. Graphiquement, on observe qu'en $+\infty$ et en $-\infty$, la courbe se rapproche de l'axe des abscisses, ce qui traduit les limites précédemment étudiées. On dit que l'axe des abscisses est une **asymptote** à la courbe représentative de la fonction inverse.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	0	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	0

2°) En 0 :

Limite en 0^+ :

$$f(10^{-6}) = \frac{1}{10^{-6}} = 10^6 \,;\, f(10^{-9}) = \frac{1}{10^{-9}} = 10^9 \,;\, f(10^{-20}) = \frac{1}{10^{-20}} = 10^{20}.$$

Quand x devient très proche de 0 en restant positif, $f(x)$ devient de plus en plus grand, et on peut le rendre aussi grand que l'on veut en choisissant un x positif suffisamment proche de 0. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0^+ (ou vers 0, avec $x > 0$) ou que la limite de $f(x)$ en 0^+ est $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$.

Limite en 0^- :

$$f(-10^{-6}) = \frac{1}{-10^{-6}} = 10^6 \,;\, f(-10^{-9}) = \frac{1}{-10^{-9}} = -10^9 \,;\, f(-10^{-20}) = \frac{1}{-10^{-20}} = -10^{20}.$$

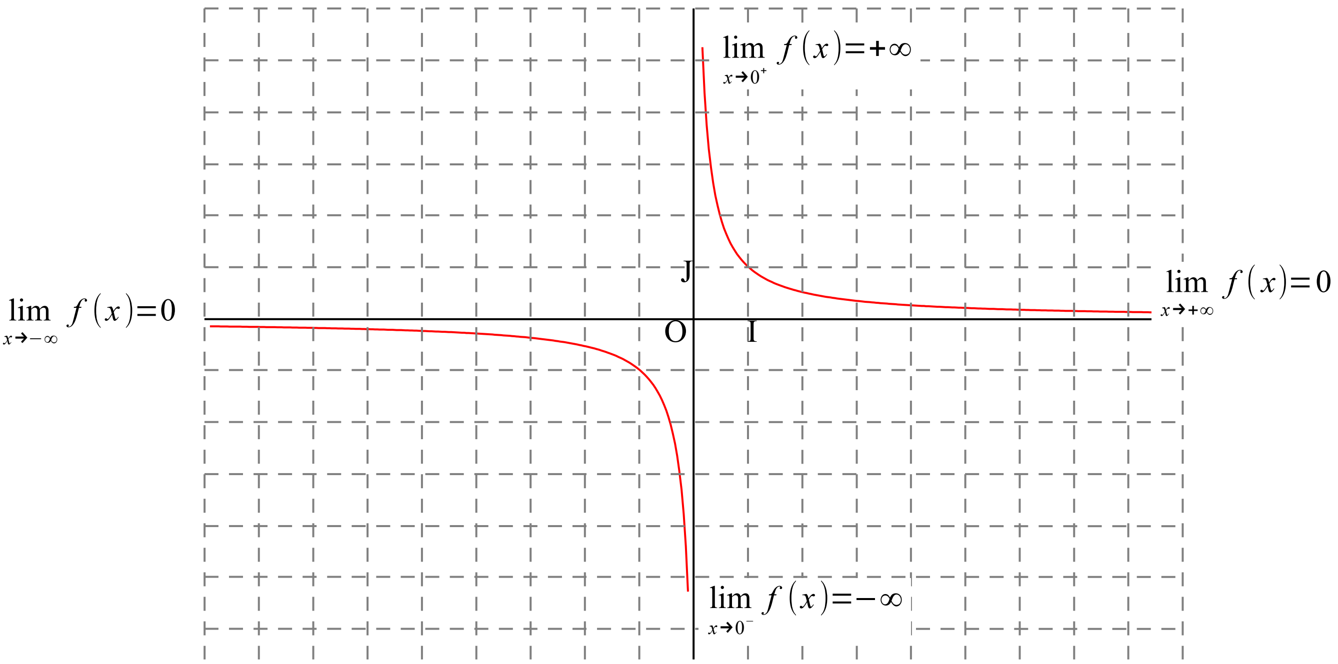
Quand x devient très proche de 0 en restant négatif, $f(x)$ devient de plus en plus grand dans les négatifs, et on peut le rendre aussi grand (négatif) que l'on veut en choisissant un x négatif suffisamment proche de 0. On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0^- (ou vers 0, avec $x < 0$) ou que la limite de $f(x)$ en 0^- est $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty$

Remarque :

Ces limites sont aussi ajoutées dans le tableau de variation de la fonction. On obtient alors le tableau de variations complet ci-dessous.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)=\frac{1}{x}$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

Et on peut observer les limites sur la représentation graphique :



Remarque :

La courbe se rapproche de l'axe des abscisses pour des valeurs proches de zéro, ce qui traduit les limites précédemment étudiées. On dit que l'axe des ordonnées est une **asymptote** à la courbe représentative de la fonction inverse.