RAPPELS SUR LES DÉRIVÉES ET LES PRIMITIVES

I. Dérivées des fonctions usuelles :

1°) Tableau des dérivées de fonctions usuelles (rappel et complément) :

	Domaine de définition de f	**fonction f**	**fonction f'**	**Domaine de définition de f'**
1	$\mathbb{R}$	$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
2	$\mathbb{R}$	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
3	$\mathbb{R}$	$f(x) = mx + p$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
4	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
5	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
6	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
7	$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
8	$\mathbb{R}$	$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$
9	$\mathbb{R}$	$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$

Remarque :

Les lignes 2 et 4 à 7 peuvent se résumer en une seule formule :

pour tout $n \geqslant -1$, si $f(x) = x^n$, alors $f'(x) = nx^{n-1}$.

Il faut simplement faire attention au domaine de définition si $n < 0$.

2°) Opération sur les fonctions dérivables (rappel et compléments) :

Dans le tableau ci-dessous, u et v sont des fonctions définies sur un même intervalle I et λ est un nombre réel.

Fonction	**Fonction dérivée**	**Exemple**
$u + v$	$u' + v'$	Si $f(x) = x + \frac{1}{x}$ alors $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.
λu	$\lambda u'$	Si $f(x) = 3x^2$ alors $f'(x) = 3\times 2x = 6x$.
uv	$u'v + uv'$	Si $f(x) = (x^2 + 2)\cos(x)$ alors $f'(x) = 2x \times \cos(x) + (x^2 + 2)(-\sin(x))$.
(u ne s'annule par sur I) $\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	Si $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ alors $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$.
(u ne s'annule par sur I) $\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	Si $f(x) = \frac{2x+3}{4x-4}$ alors $f'(x) = \frac{2(4x-4)-4(2x+3)}{(4x-4)^2} = \frac{-20}{(4x-4)^2}$

3°) Dérivée de $g(ax + b)$:

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et g une fonction définie et dérivable sur J telles que $f(x) = g(ax + b)$, où a et b sont des réels tels que $ax + b \in$ J.

Si la fonction g est dérivable sur J, alors f est dérivable sur I et $f'(x) = ag'(ax + b)$.

Exemple :

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(3x + 2)$.

$f(x) = g(ax + b)$, avec $g(x) = \cos(x)$ et $ax + b = 3x + 2$. Donc $a = 3$, et $g'(x) = -\sin(x)$.

alors $f'(x) = ag'(ax + b) = a \times (-\sin(ax + b)) = -3\sin(3x + 2)$.

Ce qui nous permet d'ajouter deux lignes au tableau des dérivées :

	Domaine de définition de f	fonction f	fonction f'	Domaine de définition de f'
10	$\mathbb{R}$	$f(x) = A\sin(\omega t + \varphi)$	$f'(x) = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$
11	$\mathbb{R}$	$f(x) = A\cos(\omega t + \varphi)$	$f'(x) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$

II. Les primitives :

1°) Définition :

Définition :

On dit que F est une primitive de f sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si F est dérivable sur I et que $F' = f$ sur I.

Autrement dit, F est une primitive de f si et seulement si f est la dérivée de F.

Remarque :

Les logiciels de calcul formel ont une commande de calcul de primitive : intégrer (fonction, x), ou sous GeoGebra intégrer(fonction).

Exemple :

$F(x) = x^2$ est une primitive de $f(x) = 2x$. En effet, $F'(x) = 2x$.

$G(x) = 6x^2 + 4x - 6$ est une primitive de $g(x) = 2x^3 + 2x^2 - 6x$ car $G'(x) = g(x)$.

2°) Propriétés :

Propriété :

Soit F une primitive de f sur un intervalle I. Alors pour tout réel c, la fonction G définie par $G(x) = F(x) + c$ est aussi une primitive de f sur I et toute primitive de f sur I est de ce type.

Autrement dit : Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Remarque :

Une fonction admettant des primitives sur I en possède donc une infinité.

Exemple :

Si $f(x) = 2x$, toutes les primitives de f sont de la forme $F(x) = x^2 + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

3°) Tableau des primitives :

En lisant le tableau des dérivées à « l'envers », on obtient le tableau suivant :

	La fonction f	Une primitive F	Définie sur
1	$f(x) = 0$	$F(x) = c$	$\mathbb{R}$
2	$f(x) = k$	$F(x) = kx$	$\mathbb{R}$
3	$f(x) = x$	$F(x) = \dfrac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
4	$f(x) = x^n$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ (n entier avec $n \geqslant 1$)	$\mathbb{R}$
5	$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + c$	$\mathbb{R}$
6	$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + c$	$\mathbb{R}$
7	$f(x) = A\sin(\omega t + \varphi)$	$F(x) = -\dfrac{A}{\omega}\cos(\omega t + \varphi) + c$	$\mathbb{R}$
8	$f(x) = A\cos(\omega t + \varphi)$	$F(x) = \dfrac{A}{\omega}\sin(\omega t + \varphi) + c$	$\mathbb{R}$

Remarque :

La ligne 3 est un cas particulier de la ligne 4 : cas où $n = 1$.

4°) Opérations sur les primitives :

Théorème :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et k une constante réelle.

Si F est une primitive de f, alors kF est une primitive sur I de kf.

Si F est une primitive de f et G une primitive de g alors F + G est une primitive de $f + g$.

Remarque :

Cette propriété permet de trouver les primitives de tous les polynômes.

Exemple :

Soient $f(x) = x^5 + 3x^2 - 5x + 2$ alors une primitive de f est $F(x) = \dfrac{x^6}{6} + 3\dfrac{x^3}{3} - 5\dfrac{x^2}{2} + 2x$.

Donc $F(x) = \dfrac{x^6}{6} + x^3 - 2{,}5x^2 + 2x$.