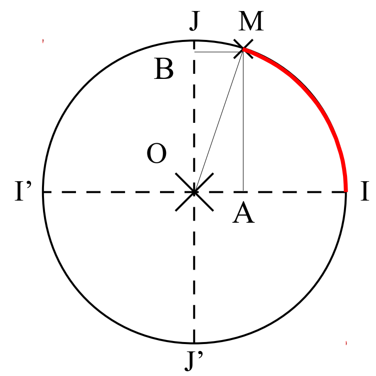
FONCTIONS SINUS ET COSINUS

I. Rappels de première :



1°) Définition :

On munit le cercle trigonométrique d'un repère orthonormé (O, I ; J).

Soit x une mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ ou $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$ (en radians).

Dans le triangle rectangle OAM, on a :

$\cos x = \dfrac{OA}{OM}$

$\cos x = \dfrac{OA}{1}$ (le cercle a pour rayon 1)

$\cos x = OA$

donc **cos x est l'abscisse de M**.

De même,

$\sin x = \dfrac{AM}{OM} = \dfrac{OB}{OM}$

$\sin x = \dfrac{OB}{1}$ (le cercle a pour rayon 1)

$\sin x = OB$

donc **sin x est l'ordonnée de M**.

Exemple :

$\cos 0 = 1$; $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$; $\sin 0 = 0$; $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

Conclusion :

Si M est le point associé au réel x sur le cercle trigonométrique, alors M ($\cos x$; $\sin x$).

2°) Propriétés et valeurs remarquables :

Propriété :

- Pour tout x, on a $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.
- Dans le triangle OAM rectangle en A on a OM = 1, OA = $\cos x$ et AM = $\sin x$, alors d'après le théorème de Pythagore $OA^2 + AM^2 = OM^2$ et donc : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (on rappelle que $\cos^2 x$ est une notation qui signifie $(\cos x)^2$).
- De plus on rappelle que pour tout x, on a $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Quelques valeurs remarquables :

Angle x	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos *x*	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin *x*	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

3°) Angles associés :

Propriété :

Soit x un réel

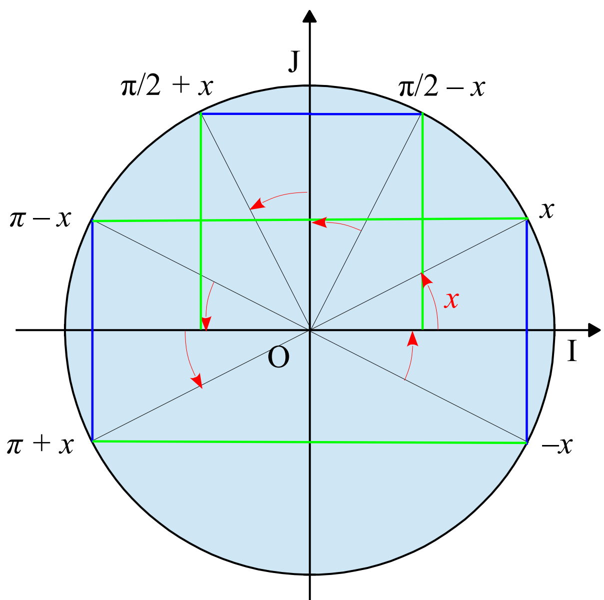
$\cos(-x) = \cos(x)$ — $\sin(-x) = -\sin(x)$

$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ — $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ — $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ — $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$ — $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$



Preuve :

Par symétries illustrées sur la figure ci-contre.

II. Équations, inéquations :

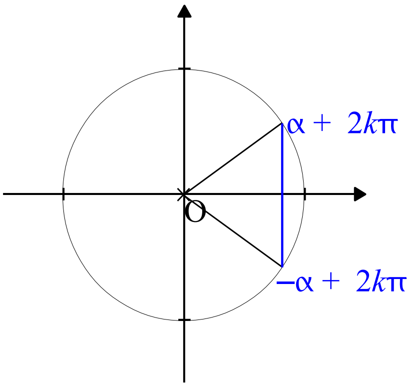
1°) Équations trigonométriques :

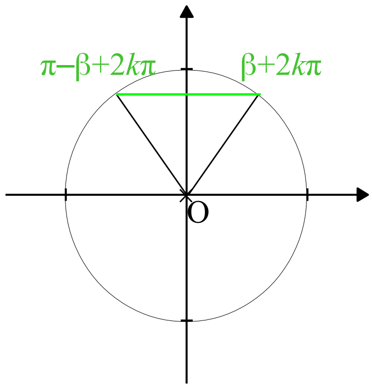
Propriété :

α et β étant des réels fixés :

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases} ;\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = \sin \beta \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases} ;\ k \in \mathbb{Z}$$





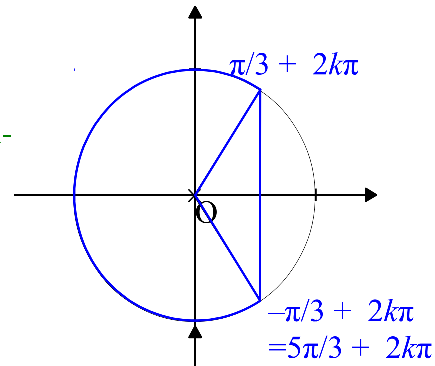
Exemple :

Résolvons $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dans $\mathbb{R}$. Cette équation revient à $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{6}$, donc $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} ;\ k \in \mathbb{Z}$.

2°) Inéquations trigonométriques :

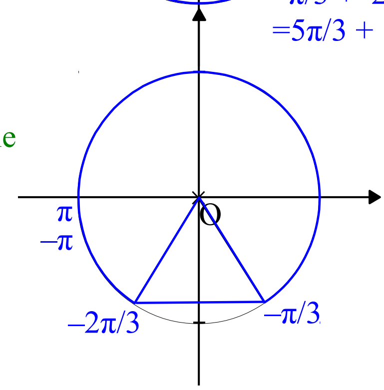
Exemple :

Résolvons $\cos x \leqslant \dfrac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}$. Grâce au cercle trigonométrique ci-contre, on obtient $x \in \left[\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi ; \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.



Exemple :

Résolvons $\sin x \geqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dans $]-\pi ; \pi]$ $\mathbb{R}$. Grâce au cercle trigonométrique ci-contre, on obtient $x \in \left]-\pi ; -\dfrac{2\pi}{3}\right] \cup \left[-\dfrac{\pi}{3} ; \pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.



III. Fonctions sinus et cosinus :

1°) Définition :

Définitions :

On appelle fonction sinus la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$.

On appelle fonction cosinus la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x$.

2°) Dérivabilité :

a) Dérivabilité de la fonction sinus :

Propriété (admise) :

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin' x = \cos x$.

Propriété :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Preuve :

$\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin x - \sin 0}{x - 0}$ est le taux de variation de la fonction sinus en 0.

Donc $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \sin'(0) = \cos 0 = 1$.

b) Dérivabilité de la fonction cosinus :

Propriété :

La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos' x = -\sin x$.

Preuve :

On sait que pour tout x de $\mathbb{R}$, $\cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ qui est de la forme $g(ax + b)$

avec $a = 1$, $b = \dfrac{\pi}{2}$ et $g(x) = \sin x$.

Donc $\cos' x = a\, g'(ax + b) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x$.

c) cos (u (x)) et sin (u (x)) :

Propriété :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors les fonctions f et g définie sur I par $f(x) = \cos(u(x))$ et $g(x) = \sin(u(x))$ sont dérivables sur I et $f'(x) = -u'(x)\sin(u(x))$ et $g'(x) = u'(x)\cos(u(x))$.

Preuve :

Il suffit de remarquer que f et g sont de la forme $v \circ u$ avec $v(x) = \cos(x)$ pour f et $v(x) = \sin(x)$ pour g.

3°) Propriétés de la fonction sinus :

a) Étude sur [0 ; π] :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x) = \cos(x)$		$+$	0	$-$	
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Remarque :

Ce tableau permet de tracer la partie rouge de la courbe ci-dessous.

On remarque aussi que $\sin'(0) = \cos(0) = 1$ et que $\sin'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. La courbe représentative de la fonction sinus admet donc la droite d'équation $y = x$ comme tangente et un tangente horizontale en $\dfrac{\pi}{2}$.

b) Parité :

Propriété :

Pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$. On dit que la fonction sinus est impaire.

Conséquence :

La courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Remarque :

Ceci permet de tracer la partie bleue de la courbe ci-dessous.

c) Périodicité :

Propriété :

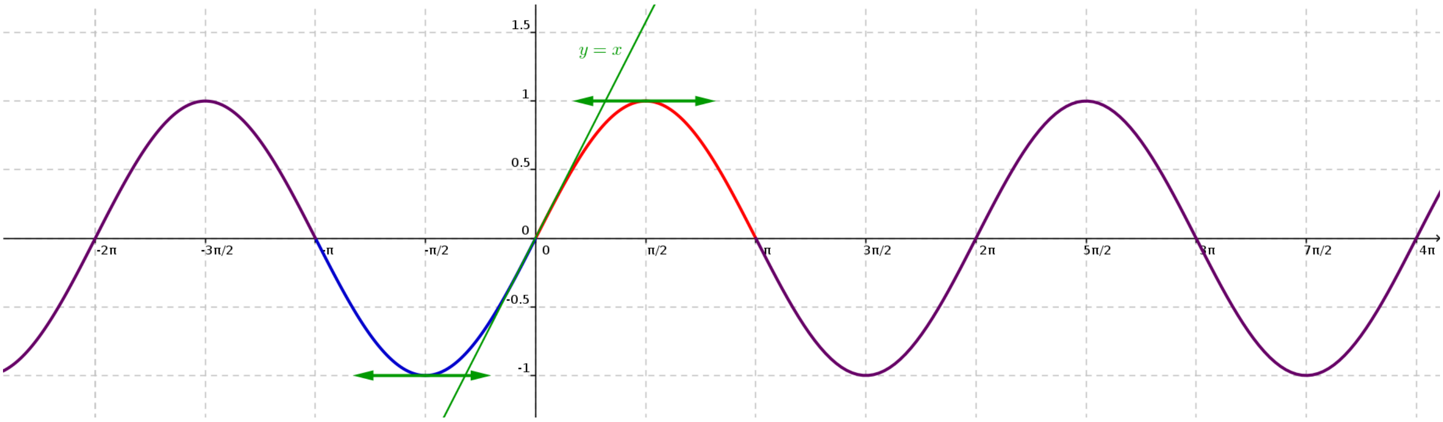
Pour tout réel x, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. On dit que la fonction sinus est périodique de période 2π.

Conséquence :

Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe de la fonction sinus est invariante par toute translation de vecteur $2k\pi\vec{i}$; $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque :

Ceci permet de tracer le reste de la courbe ci-dessous (en violet).



Vocabulaire :

Cette courbe s'appelle une sinusoïde.

4°) Propriétés de la fonction cosinus :

a) Étude sur $[0 ; \pi]$:

x	0 $\qquad$ π
$\cos'(x) = -\sin(x)$	$-$
$\cos x$	1 $\searrow$ -1

Remarque :

Ce tableau permet de tracer la partie rouge de la courbe ci-dessous.

On remarque aussi que $\cos'(0) = \sin(0) = 0$ et que $\cos'(\pi) = \sin(\pi) = 0$. La courbe représentative de la fonction cosinus admet des tangentes en 0 et π.

b) Parité :

Propriété :

Pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$. On dit que la fonction cosinus est paire.

Conséquence :

La courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Remarque :

Ceci permet de tracer la partie bleue de la courbe ci-dessous.

c) Périodicité :

Propriété :

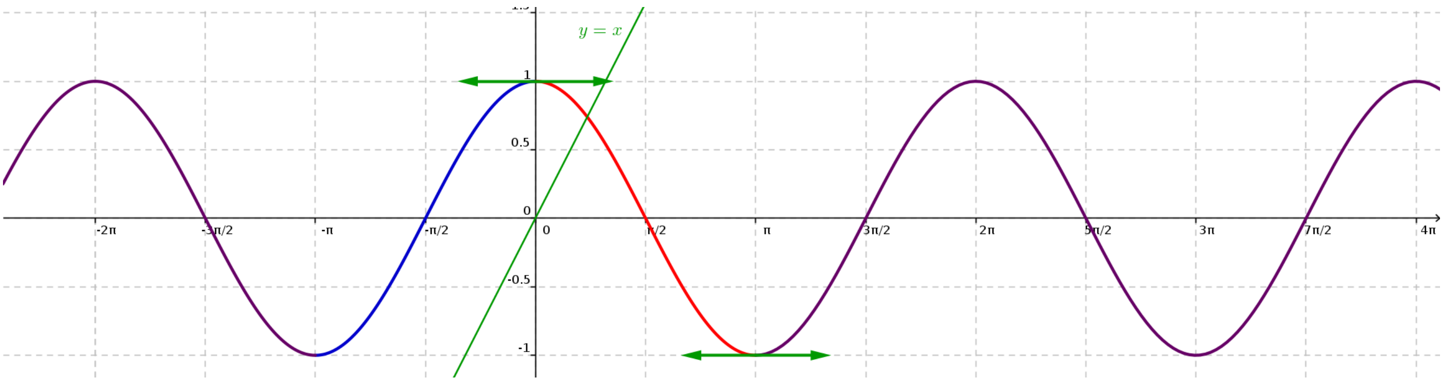
Pour tout réel x, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. On dit que la fonction cosinus est périodique de période 2π.

Conséquence :

Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe de la fonction cosinus est invariante par toute translation de vecteur $2k\pi\vec{i}$; $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque :

Ceci permet de tracer le reste de la courbe ci-dessous (en violet).



Vocabulaire :

Cette courbe s'appelle aussi une sinusoïde, car elle peut être obtenue par une translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$ de la courbe représentative de la fonction sinus.