ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, PRIMITIVES

Un peu d'histoire : Le calcul différentiel s'est développé de concert avec la physique mathématique au XVII^e siècle. Parmi les initiateurs, Fermat, Huygens, Pascal et Barrow reconnaissent que le problème des aires (le calcul intégral) est le problème inverse de celui des tangentes (la dérivation) ; ce thème peut être abordé à partir des travaux sur la quadrature de l'hyperbole.

Les travaux de Newton et Leibniz révèlent deux visions et deux pratiques différentes du calcul infinitésimal. La justification de telles méthodes nécessitait une mise au point de la notion de limite. Des fondations solides sont proposées dans le Cours d'Analyse de Cauchy (1821, 1823), qui définit précisément la notion de limites et en fait le point de départ de l'analyse. Parallèlement, les résolutions d'équations différentielles, provenant de la mécanique ou des mathématiques elles-mêmes, se structurent notamment en lien avec les séries (Newton, Euler, D'Alembert, Lagrange, Cauchy, Clairaut, Riccati) et illustrent là encore les ponts entre le discret et le continu.

I. Généralités sur les équations différentielles :

Définition :

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction. Elle lie une fonction et sa ou ses dérivée(s). Résoudre une telle équation signifie déterminer toutes les fonctions qui satisfont à l'égalité.

Remarque :

Habituellement, l'inconnue d'une équation différentielle est notée y, sa dérivée première est donc notée y', sa dérivée seconde y'' …

Exemple :

L'équation (E) : $y' + 2y = 4x + 4$ est une équation différentielle.

La fonction $f(x) = e^{-2x} + 2x + 1$ est une solution de (E). En effet, $f'(x) = -2e^{-2x} + 2$, donc $f'(x) + 2f(x) = -2e^{-2x} + 2 + 2(e^{-2x} + 2x + 1) = -2e^{-2x} + 2 + 2e^{-2x} + 4x + 2 = 4x + 4$. On dit alors que f est une solution particulière de l'équation (E).

La fonction $g(x) = 2x + 1$ est aussi une solution de (E).

En revanche, $h(x) = 5x$ n'est pas solution de (E). En effet, $h'(x) + 2h(x) = 5 + 10x \neq 4x + 4$.

Définition :

On appelle ordre d'une équation différentielle le plus haut rang de dérivation présent dans l'équation.

Exemple :

$y' + 2y = 4x + 4$ et $y' = 2x$ sont des équations différentielles du premier ordre car elle font intervenir la dérivée première de la fonction.

$y + y'' = 0$ et $y - 5y' + 3y'' = 2x$ sont des équations différentielles d'ordre 2 car elle font intervenir la dérivée seconde, et éventuellement sa dérivée première.

II. Primitives d'une fonction :

1°) Définition :

Définition :

On appelle primitive d'une fonction f, généralement notée F, toute solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Exemple :

$F(x) = x^2$ est une solution de l'équation différentielle $y' = 2x$.

$F(x) = x^2$ est donc une primitive de $f(x) = 2x$.

Remarque :

F est donc une primitive de f si et seulement si f est la dérivée de F.

2°) Propriétés :

Propriété (admise pour le moment) :

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Propriété :

Soit F une primitive de f sur un intervalle I. Alors pour tout réel c, la fonction G définie par $G(x) = F(x) + c$ est aussi une primitive de f sur I et toute primitive de f sur I est de ce type.

Autrement dit : Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Preuve (exemplaire) :

La preuve en vidéo : lien ou

$G'(x) = F'(x) + c'$ $\quad = F'(x)$ (car c est une constante, sa dérivée est donc 0)

$= f$. G est donc aussi une primitive de f.

Réciproquement :

Soient F et G deux primitives de la fonction f. On a donc $G' = f$ et $F' = f$.

$(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$. La dérivée de $G - F$ étant nulle, $G - F$ est donc une constante c. $G(x) - F(x) = c$, soit $G(x) = F(x) + c$.

Remarque :

Une fonction admettant des primitives sur I en possède donc une infinité.

Exemple :

Si $f(x) = 2x$, toutes les primitives de f sont de la forme $F(x) = x^2 + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Propriété :

Soient $(x_0 ; y_0)$ un couple de $I \times \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Exemple :

Recherchons la primitive de $f(x) = 2x$ telle que $F(4) = 2$. D'après l'exemple précédent, elle est de la forme $F(x) = x^2 + c$. On a $F(4) = 2$, soit $4^2 + c = 2$, d'où $c = -14$. La primitive de $f(x) = 2x$ telle que $F(4) = 2$ est donc $F(x) = x^2 - 14$.

3°) Tableau des primitives :

En lisant le tableau des dérivées à « l'envers », on obtient le tableau suivant :

	La fonction f	Fonctions primitives F (c est une constante réelle)	Définie sur
1	$f(x) = 0$	$F(x) = c$	$\mathbb{R}$
2	$f(x) = k$	$F(x) = kx + c$	$\mathbb{R}$
3	$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2} + c$	$\mathbb{R}$
4	$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ (n entier relatif non nul différent de -1)	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 1$ et $\mathbb{R}^*$ si $n \leqslant -2$
5	$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + c$	$\mathbb{R}^*$
6	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$	$\mathbb{R}_+^*$
7	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$	$\mathbb{R}$
8	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x) + c$	$\mathbb{R}_+^*$
9	$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + c$	$\mathbb{R}$
10	$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + c$	$\mathbb{R}$

Remarque :

Les lignes 3 et 5 ne sont que des cas particuliers de la ligne 4 : cas où $n = 1$ et cas où $n = -2$.

4°) Opérations sur les primitives :

Théorème :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et k une constante réelle.

Si F est une primitive de f, alors kF est une primitive sur I de kf.

Si F est une primitive de f et G une primitive de g alors F + G est une primitive de $f + g$.

Exemples :

Soient $f(x) = x^5$ et $g(x) = \sin x$. D'après le tableau ci-dessus, $F(x) = \dfrac{x^6}{6}$ et $G(x) = -\cos x$ sont des primitives respectives de f et g.

Donc, si $h(x) = 6f(x)$, alors $H(x) = 6F(x) = x^6$ est une primitive de $h(x)$.

Si $i(x) = f(x) + g(x)$, alors $I(x) = F(x) + G(x) = \dfrac{x^6}{6} - \cos x$ est une primitive de $i(x)$

5°) Primitive de $(v' \circ u) \times u'$:

Propriété :

Si v est une fonction dérivable sur un intervalle J et que, pour tout x de I, $u(x) \in$ I, alors $u' \times (v' \circ u)$ a pour primitive $v \circ u$.

Quelques cas particuliers fréquents dans le tableau ci-dessous.

	La fonction f		Une fonction primitive F
1	$n \in \mathbb{Z} - \{-1 ; 0\}$ si $n < 0$, $u(x) \neq 0$ pour tout x de I	$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
2	$u(x) \neq 0$ pour tout x de I	$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$
3	$u(x) > 0$ pour tout x de I	$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
4	$u(x) \neq 0$ pour tout x de I	$\dfrac{u'}{u}$	$\ln \lvert u \rvert$
5		$u'e^u$	e^u
6		$u' \cos u$	$\sin u$
7		$u' \sin u$	$-\cos u$

Exemples :

- **Cherchons les primitives** de $h(x) = (x + 1)(x^2 + 2x - 5)^3$ sur $\mathbb{R}$.

$h = \dfrac{1}{2} u'u^n$ avec $u(x) = x^2 + 2x - 5$ et $n = 3$ donc $u'(x) = 2x + 2$.

Les primitives de h sont donc les fonctions $H = \dfrac{1}{2}\dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c$

soit $H(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{(x^2+2x-5)^4}{4} + c = \dfrac{(x^2+2x-5)^4}{8} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

- **Cherchons la primitive** $G(x)$ de $g(x) = \dfrac{4x+6}{\sqrt{x^2+3x-1}}$, telle que $G(2) = 5$, sur $[1 ; +\infty[$.

$g = \dfrac{2u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^2 + 3x - 1$ donc $u'(x) = 2x + 3$

Les primitives de g sont donc les fonctions $G = 2 \times 2\sqrt{u} + c$, $c \in \mathbb{R}$

soit $G(x) = 4\sqrt{x^2+3x-1} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Or, $G(2) = 5$, soit $4\sqrt{4+6-1} + c = 5 \Leftrightarrow 12 + c = 5 \Leftrightarrow c = -7$.

La primitive cherchée est donc $G(x) = 4\sqrt{x^2+3x-1} - 7$.

III. Équations différentielles du type $y' = ay + b$:

1°) Équations différentielles du type $y' = ay$ (cas $b = 0$) :

a) Solution générale :

Théorème :

Soit $y' = ay$ une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant $a \in \mathbb{R}$. Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions dérivables, définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = k\mathrm{e}^{ax} \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

Démonstration (exemplaire) :

Soit (E) l'équation différentielle $y' = ay$.

● Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{ax}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = ka\mathrm{e}^{ax}$.

$a\,f(x) = a \times k\mathrm{e}^{-ax} = ka\mathrm{e}^{ax}$, donc f est bien solution de (E).

Les fonctions de la forme $x \longmapsto k\mathrm{e}^{ax}$ sont donc des solutions de (E).

● Il reste à montrer qu'il n'y en a pas d'autres. Pour cela, on suppose que g est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de (E) et on va montrer qu'alors elle est de la forme $x \longmapsto k\mathrm{e}^{ax}$.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{-ax}$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $h'(x) = g'(x)\mathrm{e}^{-ax} - ag(x)\mathrm{e}^{-ax} \Leftrightarrow h'(x) = \mathrm{e}^{-ax}(g'(x) - ag(x))$.

Mais comme g est solution de (E), on a $g'(x) - ag(x) = 0$ soit $h'(x) = 0$, ce qui signifie que h est une constante.

On a alors : $h(x) = k \Leftrightarrow g(x)\mathrm{e}^{-ax} = k \Leftrightarrow g(x) = k\mathrm{e}^{ax}$.

La démonstration en vidéo : [lien]() ou

Remarque :

Il y a donc une infinité de fonctions solutions d'une telle équation : à chaque valeur de k correspond une fonction solution. Si on rajoute une condition initiale (c'est-à-dire qu'on impose une image particulière pour f), alors l'équation admet une unique solution.

Exemple :

● Résolution de l'équation différentielle : $y' = -4y$

Les solutions sont du type $f(x) = k\mathrm{e}^{-4x}$ où k est une constante réelle. Par exemple, $f(x) = \mathrm{e}^{-4x}$ ou $f(x) = 2\mathrm{e}^{-4x}$ ou encore $f(x) = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4x}$ sont des solutions de cette équation différentielle.

● Déterminons la solution f de l'équation différentielle $y' - 3y = 0$ telle que $f(0) = 5$.

Cette équation peut s'écrire $y' = 3y$. Les solutions sont du type $f(x) = k\mathrm{e}^{3x}$ où k est une constante réelle.

$f(0) = 5 \Leftrightarrow k\mathrm{e}^{0} = 5 \Leftrightarrow k = 5$. La solution cherchée est donc $f(x) = 5\mathrm{e}^{3x}$.

● Résolution de l'équation différentielle : $2y' + 5y = 0$:

Cette équation peut s'écrire $y' = -\frac{5}{2}y$. Les solutions sont du type $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}x}$ où k est une constante réelle.

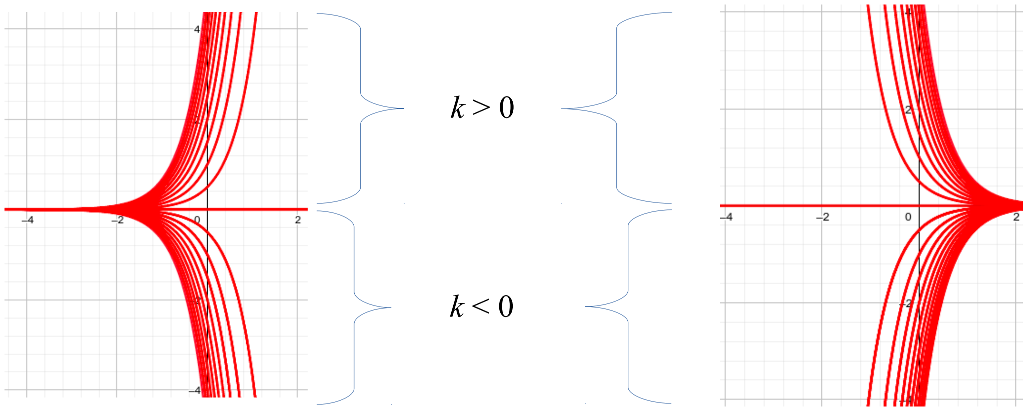
b) Allure des courbes des fonctions solutions :

Fonctions solutions de $y' = 2y$:

$f(x) = ke^{2x}$, pour les valeurs de k de $[-5\ ;\ 5]$ avec un pas de 0,5.

Fonctions solutions de $y' = -2y$

$f(x) = ke^{-2x}$, pour les valeurs de k de $[-5\ ;\ 5]$ avec un pas de 0,5.



2°) Équations différentielles du type $y' = ay + b = 0$:

a) Solution particulière constante :

Théorème :

Soit $y' = ay + b$ (E) une équation différentielle du premier ordre où a et b sont des réels avec $a \neq 0$. La fonction constante $y_0(x) = -\dfrac{b}{a}$ est une solution de (E).

Preuve :

$y_0'(x) = 0$ et $ay_0(x) + b = a \times \left(-\dfrac{b}{a}\right) + b = 0$.

b) Solution générale :

Vocabulaire :

Soit $y' = ay + b$ (E) une équation différentielle du premier ordre où a et b sont des réels avec $a \neq 0$. L'équation $y' = ay$ (H) s'appelle équation homogène associée à (E).

Théorème (admis) **:**

Soit $y' = ay + b$ (E) une équation différentielle du premier ordre où a et b sont des réels avec $a \neq 0$. On obtient les solutions de cette équation différentielle en ajoutant la solution générale de l'équation homogène qui lui est associée avec sa solution particulière constante. Les solution de (E) sont donc les fonctions :

$$f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a} \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

Remarque :

Il y a donc une infinité de fonctions solutions d'une telle équation : à chaque valeur de k correspond une fonction. Si on rajoute une condition initiale (c'est-à-dire qu'on impose une image particulière pour f), alors l'équation admet une unique solution.

Exemple :

- Résolution de l'équation différentielle : $y' = -4y + 3$ (E) :

La solution générale de $y' = -4y$, équation homogène associée à (E) sont les fonctions $f(x) = ke^{-4x}$ où k est une constante réelle.

La solution particulière constante de (E) est $\dfrac{3}{4}$.

La solution générale de (E) sont donc les fonctions $f(x) = ke^{-4x} + \dfrac{3}{4}$.

Par exemple, $f(x) = e^{-4x} + \dfrac{3}{4}$ ou $f(x) = 2e^{-4x} + \dfrac{3}{4}$ ou encore $f(x) = -\dfrac{1}{3}e^{-4x} + \dfrac{3}{4}$ sont des solutions de cette équation différentielle.

● Recherche de la solution telle que $f(1) = 2$:

$$f(1) = 2 \Leftrightarrow k\mathrm{e}^{-4} + \frac{3}{4} = 2 \Leftrightarrow k = \frac{2-\frac{3}{4}}{\mathrm{e}^{-4}} = 1{,}25\mathrm{e}^{4}.$$

La solution cherchée est donc $f(x) = 1{,}25\mathrm{e}^{4}\,\mathrm{e}^{-4x} + \frac{3}{4} = 1{,}25\mathrm{e}^{-4x+4} + \frac{3}{4}$.

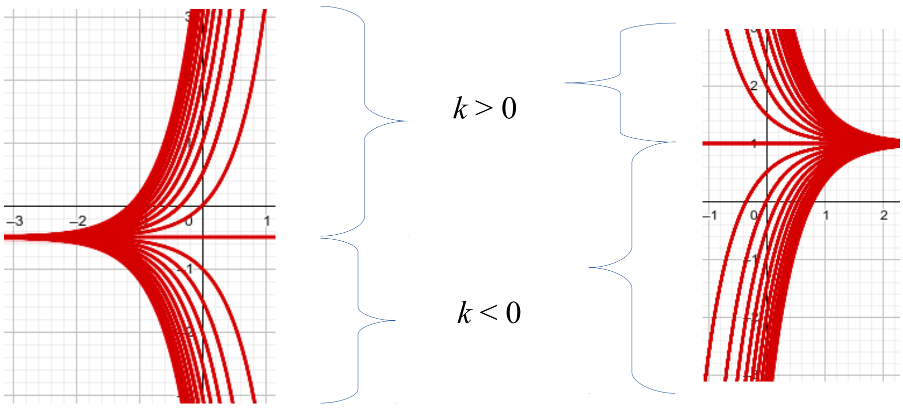
c) Allure des courbes des fonctions solutions :

Fonctions solutions de $y' = 2y + 1$:

$f(x) = k\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}$, pour les valeurs de k de $[-5\ ;\ 5]$ avec un pas de 0,5.

Fonctions solutions de $y' = -2y + 2$

$f(x) = k\mathrm{e}^{-2x} + 1$, pour les valeurs de k de $[-5\ ;\ 5]$ avec un pas de 0,5.



IV. Équations différentielles du type $y' = ay + f$:

1°) Solution générale :

Théorème (admis) **:**

Soient a un réel et $f(x)$ une fonction.

Les solutions de l'équation différentielle (E) : $y' = ay + f$ s'obtiennent en ajoutant une solution particulière de (E) et la solution générale de l'équation homogène associée à (E) : $y' = ay$.

Remarque :

Dans les exercices, la solution particulière vous sera donnée.

Exemple :

Problème :

Résolution de l'équation différentielle $y' = -y + 2x + 3$ (E) :

1°) Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x + 1$ est une solution de (E).

2°) Résoudre $y' = -y$. et

3°) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Solution :

1°) $g(x) = 2x + 1$, donc $g'(x) = 2$, donc $-g(x) + 2x + 3 = -2x - 1 + 2x + 3 = 2 = g'(x)$. Donc g est bien solution de (E).

2°) $y' = -y$ est une équation de la forme $y' = ay$ avec $a = -1$, ses solutions sont donc les fonctions de la forme $y_0(x) = k\mathrm{e}^{-x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

3°) L'ensemble des solutions de l'équation (E) est donc l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = y_0(x) + g(x) = k\mathrm{e}^{-x} + 2x + 1$.

2°) Unicité de la solution sous condition initiale :

Remarque :

Il y a donc une infinité de fonctions solutions d'une telle équation : à chaque valeur de k correspond une fonction. Si on rajoute une condition initiale (c'est-à-dire qu'on impose une image particulière pour f), alors l'équation admet une unique solution.

Exemple :

Déterminer la solution f l'équation différentielle : $y' = -y + 2x + 3$ (E) telle que $f(1) = 4$.

D'après le 1°), f est de la forme $f(x) = ke^{-x} + 2x + 1$. $f(1) = 4$ s'écrit alors $ke^{-1} + 2\times1 + 1 = 4$ soit $ke^{-1} = 1$. Autrement dit $k = e$.

$f(x) = e\times e^{-x} + 2x + 1 = e^{-x+1} + 2x + 1$.

V. Différentes notations :

En physique, la position ou l'évolution d'un système dépend du temps, la variable est donc t. On cherche alors une fonction $f : t \longmapsto f(t)$. On l'écrit souvent $t \longmapsto x(t)$ ou $t \longmapsto y(t)$, et la dérivée par rapport au temps s'écrit $x'(t) = \dot{x}(t) = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d}{dt}x(t)$.

L'équation différentielle $y' = -y + 2x + 3$ par exemple, peut s'écrire alors

$x'(t) = -x(t) + 2t + 3$ ou $\dot{x}(t) = -x(t) + 2t + 3$ ou $\dfrac{dx}{dt} = -x + 2t + 3$ ou $\dfrac{d}{dt}x(t) = -x(t) + 2t + 3$.

Mais dans tous les cas, il s'agit de la même équation.