

FUNCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Un peu d'histoire :

À la fin du 16^{ème} siècle, les calculs pour la navigation, les banques ou l'astronomie sont très lourds, car fondés essentiellement sur des multiplications de nombres aux très nombreux chiffres avant et après la virgule.

En 1614, un mathématicien écossais, John Napier (1550 ; 1617) ci-contre, plus connu sous le nom francisé de Neper publie le traité « Mirifici logarithmorum canonis descriptio ».

Dans cet ouvrage, qui est la finalité d'un travail de 20 ans, Neper présente un outil permettant de simplifier les calculs opératoires : le logarithme.

Neper construit le mot à partir des mots grecs « logos » (logique) et arithmos (nombre).

Toutefois cet outil ne trouvera son essor qu'après la mort de Neper. Les mathématiciens anglais Henri Briggs (1561 ; 1630) et William Oughtred (1574 ; 1660) reprennent et prolongent les travaux de Neper.

Les mathématiciens de l'époque établissent alors des tables de logarithmes de plus en plus précises.

À faire seul·es : prendre un bon départ labomep : [lien](#) ou



I. Définition et propriétés :

1°) Définition :

Définition :

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. C'est-à-dire $\ln a = b \Leftrightarrow a = e^b$.

Conséquences immédiates :

- $\ln(1) = 0$ (car $e^0 = 1$) et $\ln(e) = 1$ (car $e^1 = e$).
- L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est $]0 ; +\infty[$ (seuls les nombres positifs ont un logarithme, car $e^x > 0$)
- Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.
- Pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$.

Remarques :

La touche  de la calculatrice permet de calculer le logarithme népérien.

Les courbes des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$)(démonstration plus bas).

2°) Variations :

Propriété :

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Démonstration :

Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$.

On en déduit que $e^{\ln(a)} < e^{\ln(b)}$, donc que $\ln(a) < \ln(b)$ car la fonction exponentielle est croissante. La fonction logarithme népérien conserve l'ordre des nombres, elle est donc croissante.

Applications (équations et inéquations) :

Pour tous réels a et b strictement positifs,

- $\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b$
- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$

3°) Propriétés :

Propriété :

Quels que soient les réels strictement positifs a et b , $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Démonstration :

On note $A = \ln(ab)$ et $B = \ln(a) + \ln(b)$.

On a alors $e^A = ab$ et $e^B = e^{\ln(a) + \ln(b)} = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = ab$. Donc $e^A = e^B$, d'où $A = B$.

Conséquences :

Quels que soient les réels strictement positifs a et b , et l'entier naturel n

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) .$$

$$\ln(a^n) = n \cdot \ln(a) \qquad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a) .$$

Démonstration :

1) On a $a \times \frac{1}{a} = 1$ donc $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln(1)$ soit $\ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ln(1)$

$$\ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = 0 . \text{ Donc } \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) .$$

2) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

3) Initialisation :

$$\ln(a^1) = 1 \times \ln(a)$$

Hérédité :

Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\ln(a^k) = k \ln(a)$.

$$\ln(a^{k+1}) = \ln(a^k \times a) = \ln(a^k) + \ln(a) = k \ln(a) + \ln(a) = (k+1) \ln(a) .$$

Conclusion :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(a^n) = n \ln(a)$.

4) Lorsque a est un réel strictement positif, on a $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$.

$$\ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = \ln a \Leftrightarrow 2 \ln(\sqrt{a}) = \ln a \Leftrightarrow \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a .$$

Exemples :

Simplifions $A = \ln(3x) - \ln(3)$ et $B = 4 \ln(25) - 2 \ln(\sqrt{5})$.

$$A = \ln(3x) - \ln(3) = \ln(3) + \ln(x) - \ln(3) = \ln(x)$$

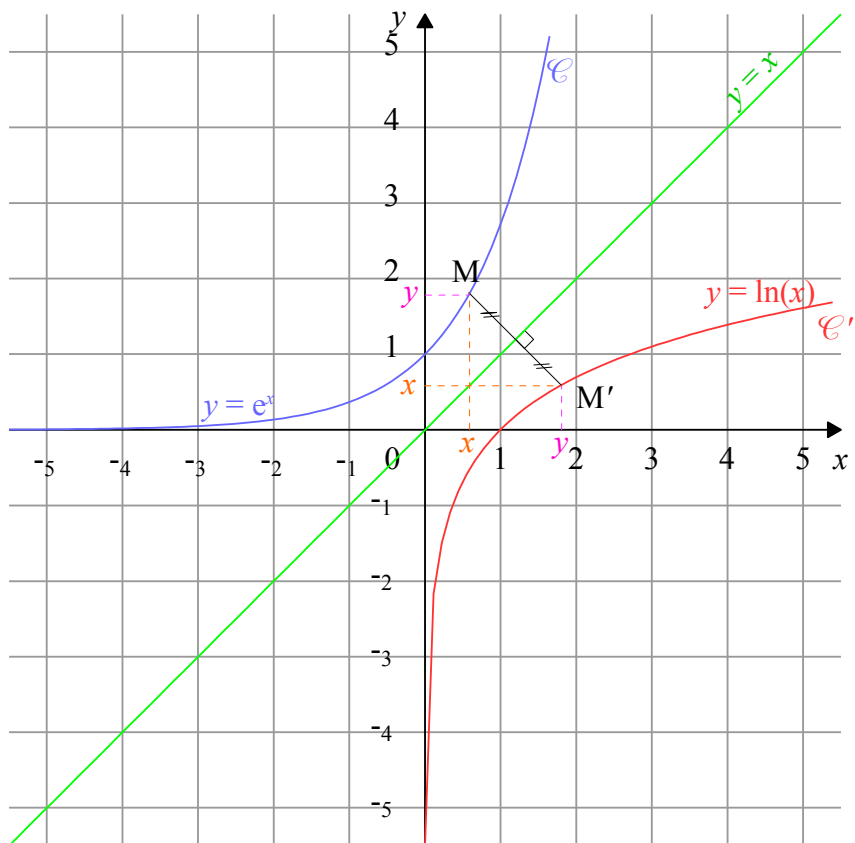
$$B = 4 \ln(25) - 2 \ln(\sqrt{5}) = 4 \times 2 \ln(5) - 2 \times \frac{1}{2} \ln(5) = 7 \ln(5)$$

II. Étude de la fonction logarithme népérien :

1°) Propriété :

Propriété :

Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Démonstration :

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les courbes d'équations respectives $y = e^x$ et $y = \ln x$.

D'après la définition de la fonction $\ln$, $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$

donc $M(x; y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow M'(y; x) \in \mathcal{C}'$.

c'est-à-dire que M et M' sont symétriques par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

En effet, le milieu de $[MM']$ a ses deux coordonnées égales à $\frac{x+y}{2}$, il est donc sur la droite $\mathcal{D}$.

De plus, le vecteur $\overrightarrow{MM'} \begin{pmatrix} y-x \\ x-y \end{pmatrix}$ est orthogonal au vecteur $\vec{u}(1;1)$, vecteur directeur de $\mathcal{D}$ car $\vec{u} \cdot \overrightarrow{MM'} = y-x+x-y=0$.

Ainsi, dire que $M(x; y)$ est sur la courbe représentative de l'exponentielle équivaut à dire que son symétrique par rapport à $\mathcal{D}$ est $M'(y; x)$ est sur la courbe représentative de la fonction logarithme.

2°) Tableau de variation :

Propriétés :

La fonction $\ln$ est dérivable (donc continue) sur $]0; +\infty[$ et

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

x	0	$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$		+
$f(x) = \ln(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Preuve (exemplaire) :

On admet que la fonction $\ln$ est dérivable.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = e^{\ln x}$.

D'une part, d'après les conséquences immédiates du **I. 1°**, $f(x) = x$, donc $f'(x) = 1$

D'autre part $f(x) = e^{u(x)}$ avec $u(x) = \ln x$, donc $u'(x) = (\ln x)'$

Donc $f'(x) = u'(x) e^{u(x)} = u'(x) e^{\ln(x)} = u'(x) \times x$.

Donc $u'(x) \times x = 1$, soit $u'(x) = \frac{1}{x}$.

CQFD.

La preuve en vidéo : [lien](#) ou



Exemples :

Études de $f(x) = x^3 \ln x$ et $g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ en vidéo : [lien](#) ou



III. Compléments sur la fonction $\ln$:

1°) Croissance comparée :

Propriété :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0 ;$$

Preuve pour la deuxième (exemplaire) :

Pour tout $x > 0$, on a $x \ln x = e^{\ln x} \ln x = X e^X$ en posant $X = \ln x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} X = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} X e^X = 0$ (par croissance comparée), donc

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

par composition de limites.

Preuve en vidéo de toutes les propriétés : [lien](#) ou



2°) Fonctions $x \mapsto \ln[u(x)]$:

Propriété (admise) :

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I . La fonction $\ln u$ est dérivable sur I

$$\text{et } (\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

Exemples :

Deux exemples en vidéo : [lien](#) ou



Remarque :

$u > 0$ sur I , donc $(\ln u)'$ a le même signe que u' .

Les fonctions u et $\ln u$ ont par conséquent le même sens de variation sur I .