REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES
ÉQUATIONS CARTÉSIENNES

Activité 5 p 279

I. Représentation paramétrique d'une droite :

Propriété :

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, soit la droite passant par le point A (x_A ; y_A ; z_A) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. Alors M $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $\in \mathcal{D}$ si et seulement si ses coordonnées vérifient le système $\begin{cases}x=x_A+ta\\y=y_A+tb\\z=z_A+tc\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

Preuve :

M $\in \mathcal{D} \Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix} = t\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x-x_A=ta\\y-y_A=tb\\z-z_A=tc\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=x_A+ta\\y=y_A+tb\\z=z_A+tc\end{cases}.$$

Définition :

Le système $\begin{cases}x=x_A+ta\\y=y_A+tb\\z=z_A+tc\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ est appelé représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

À chaque valeur du réel t correspond un point de $\mathcal{D}$ et réciproquement, à chaque point de $\mathcal{D}$ correspond un réel t.

Exemple :

Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) avec A (–1 ; 2 ; –3) et B (1 ; –1 ; 1).

La droite (AB) passe par A et admet le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

Nous obtenons la représentation paramétrique suivante :

(AB) : $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-3t\\z=-3+4t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

Nous aurions pu choisir le point B comme point de (AB). Cela aurait donner :

(AB) : $\begin{cases}x=1+2s\\y=-1-3s\\z=1+4s\end{cases}$, $s\in\mathbb{R}$

Remarque :

Une droite ayant une infinité de points et un infinité de vecteurs directeurs, sa représentation paramétrique n'est pas unique.

II. Équations cartésiennes d'un plan :

Propriété :

Soient a, b, c et d quatre réels, tels que $(a\,;\,b\,;\,c) \neq (0\,;\,0\,;\,0)$. On se place dans un repère orthonormé.

Un plan de l'espace de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet une équation du type $ax + by + cz + d = 0$.

Réciproquement, l'ensemble des points M $(x\,;\,y\,;\,z)$ de l'espace tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan admettant le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

Définition :

On dit alors que $ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne du plan.

Preuve (exemplaire) :

Soient $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur et A $(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ un point de l'espace muni d'un repère orthonormé. Soit $\mathscr{P}$ le plan de vecteur normal $\vec{n}$ et passant par A.

$$\text{M}(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix}\cdot\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a(x-x_A) + b(y-y_A) + c(z-z_A) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$$

En posant $d = -ax_A - by_A - cz_A$, on obtient bien une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$

La démonstration en vidéo : lien où

Exemple :

Cherchons une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par A $(-2\,;\,1\,;\,3)$ et orthogonal à la droite (BC) avec B $(1\,;\,-2\,;\,2)$ et C $(4\,;\,1\,;\,-1)$ par deux méthodes.

Méthode 1 :

Le vecteur $\overrightarrow{BC}(3;3;-3)$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$, donc $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $3x + 3y - 3z + d = 0$. Comme $\mathscr{P}$ passe par A, ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathscr{P}$ donc $3(-2) + 3\times1 - 3\times3 + d = 0$, donc $d = 12$, soit $3x + 3y - 3z + 12 = 0$ après simplification $x + y - z + 4 = 0$ est donc une équation de $\mathscr{P}$.

Méthode 2 :

Le vecteur $\overrightarrow{BC}(3;3;-3)$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$,

$$\text{donc M}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \\ z-3 \end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow 3(x+2) + 3(y-1) - 3(z-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 3y - 3z + 12 = 0 \Leftrightarrow x + y - z + 4 = 0.$$

Remarque :

Un plan a une infinité d'équations cartésiennes.

Vidéo : utilisation des vecteurs normaux et les équations cartésiennes de plan lors d'exercices : lien ou