

SCHÉMA DE BERNOULLI, LOI BINOMIALE

Histoire des maths :

La parution de l'Ars Conjectandi de Jacques Bernoulli (1713), reprenant notamment d'anciens travaux de Huygens, marque une rupture dans l'histoire des probabilités. On y trouve la première étude de la distribution binomiale, introduite dans le cadre d'un tirage sans remise pour un modèle d'urne.



Petite introduction en vidéo : [lien](#) ou

I. Succession d'épreuves indépendantes :

1°) Univers d'une succession d'épreuves :

Définition :

Soit une succession de n épreuves indépendantes dont les univers associés sont respectivement $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_n$. L'univers associé Ω à cette succession de n épreuves est le produit cartésien : $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 \times \dots \times \Omega_n$

Remarque :

Un élément de l'univers Ω est donc un n -uplet : $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où $x_i \in \Omega_i$, pour $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$.

Exemple :

On lance successivement un dé tétraédrique numéroté de 1 à 4 et un dé normal à 6 faces. Le résultat du premier dé n'a pas d'influence sur le résultat du deuxième dé donc les épreuves sont indépendantes. L'univers est donc : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\} \times \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

Le couple (3 ; 5) est une issue possible contrairement à (5 ; 3) qui est impossible.

2°) Probabilité d'une succession d'épreuves :

Propriété :

Soit une succession de n épreuves indépendantes.

La probabilité d'obtenir une issue $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est alors : $P(x) = P(x_1) \times P(x_2) \times \dots \times P(x_n)$.

Preuve :

Application de la probabilité de n événements indépendants.

Exemple :

Dans l'exemple précédent, la probabilité de l'événement $A = \{(3, 5)\}$, avec des dés bien équilibrés est $P(A) = P(3) \times P(5) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$.

Remarque :

Si les n épreuves ne sont pas indépendantes, la probabilité d'une issue se détermine à l'aide des probabilités conditionnelles.

II. Schéma de Bernoulli :

1°) Épreuve de Bernoulli :

Définition :

On appelle épreuve de Bernoulli (ou expérience de Bernoulli) une expérience aléatoire qui comporte exactement deux issues :

- l'une est appelée succès, notée S.
- l'autre est appelée échec, notée E ou $\bar{S}$.

Exemple :

Une question d'un QCM est composée de 4 réponses, dont une seule est correcte. On suppose qu'un élève répond totalement au hasard.

L'expérience aléatoire consistant à regarder la réponse de l'élève à la question n'est pas une épreuve de Bernoulli, car elle possède 4 issues.

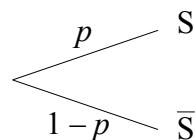
En revanche, l'expérience aléatoire consistant à regarder si la réponse est juste est une épreuve de Bernoulli. On appelle succès l'événement « répondre juste » et échec « répondre faux ».

2°) Loi de Bernoulli :

Définition :

Soit X la variable aléatoire associée à une épreuve de Bernoulli qui prend la valeur 1 pour un succès et 0 pour un échec. Soit p la probabilité du succès. La loi de probabilité de X est appelée loi de Bernoulli de paramètre p . Elle est notée $\mathcal{B}(p)$.

x_i	0	1
$p(X = x_i)$	$1 - p$	p



Exemple :

Dans l'exemple précédent, un candidat a une probabilité de répondre juste de $\frac{1}{4}$. Celle de répondre faux est donc de $\frac{3}{4}$. La loi de Bernoulli correspondant à cette expérience aléatoire est donc $\mathcal{B}\left(\frac{1}{4}\right)$.

Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. On a alors

$$E(X) = p ; V(X) = p(1-p) \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}.$$

Preuve :

$$E(X) = 0(1-p) + 1 \times p = p.$$

$$V(X) = p(1 - E(X))^2 + (1-p)(0 - E(X))^2 = p(1-p)^2 + (1-p)(0-p)^2 = p(1-p)(1-p) + p(1-p) \times p = p(1-p)(1-p+p) = p(1-p).$$

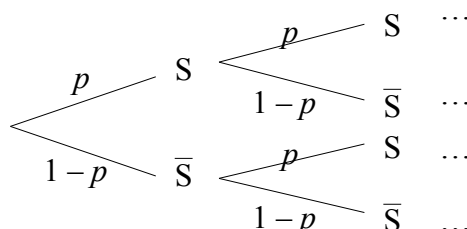
2°) Schéma de Bernoulli :

Définition :

On appelle schéma de Bernoulli toute expérience aléatoire consistant à répéter n fois la même épreuve de Bernoulli de façon indépendante (c'est-à-dire dans les mêmes conditions, les résultats des premières épreuves n'influent pas sur les résultats des suivantes). On dit que le schéma de Bernoulli est de paramètre n (le nombre de répétitions) et p (la probabilité du succès).

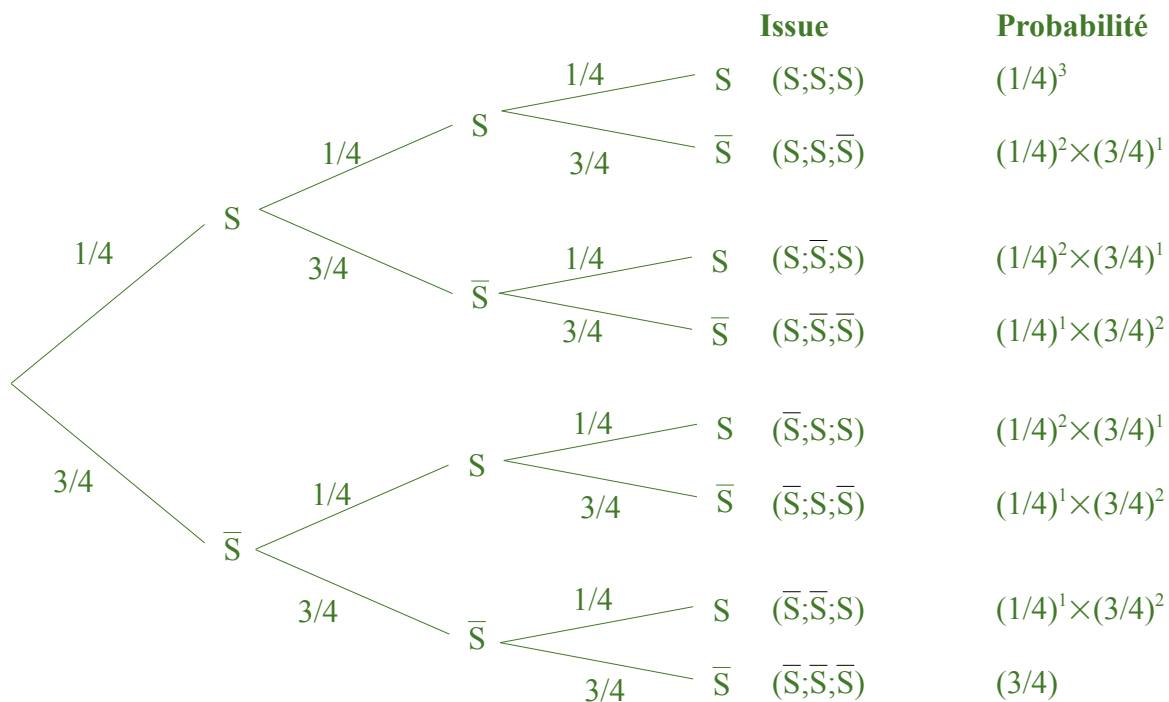
Remarque :

Un résultat d'un schéma de Bernoulli est donc une liste de n issues qui sont soit des succès, soit des échecs. Exemple : $\{S ; E ; S ; S ; \dots ; S ; E ; E\}$.



Exemple :

Reprenons l'exemple précédent : un exercice comporte 3 questions. On est donc en présence d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{4}$. On peut représenter les éventualités sur un arbre pondéré :



III. Loi binomiale :

1°) Loi binomiale :

Définition :

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de succès obtenus dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p . La loi de probabilité de la variable X est appelée loi binomiale de paramètres n et p , notée $\mathcal{B}(n, p)$.

Exemple :

Reprenons l'exemple de l'exercice de QCM avec 3 questions comportant chacune 4 réponses possibles, une seule d'entre elles étant correcte. La variable aléatoire X qui correspond au nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,25$ (c'est-à-dire $\mathcal{B}(3 ; 0,25)$). Le nombre de bonnes réponses varie de 0 à 3 donc $X \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$. On obtient la loi de probabilité suivante :

Valeur de $X(x_i)$	0	1	2	3
$P(X = x_i) = p_i$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3$	$3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$	$3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1$	$\left(\frac{1}{4}\right)^3$

Remarque :

$P(X = 1) = P(\{(S ; \bar{S} ; \bar{S}) ; (\bar{S} ; S ; \bar{S}) ; (\bar{S} ; \bar{S} ; S)\})$. Nous remarquons que chacun des événements élémentaires qui composent cet événement a la même probabilité : $\left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$ (1 succès, 2 échecs). Pour calculer $P(X = 1)$, il suffit donc de multiplier cette probabilité par le nombre de branches de l'arbre de probabilité menant à exactement 1 succès.

2°) Probabilité :

Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n; p)$.

Pour tout entier k appartenant à $[0; n]$, on a $P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$.

Preuve (exemplaire) :

Sur n épreuves, si on a k succès, cela signifie que l'on a $n - k$ échecs. La probabilité d'avoir k succès suivis de $n - k$ échecs est de $p^k \times (1-p)^{n-k}$. Chaque issue comportant k succès et $n - k$ échecs à la même probabilité, quel que soit l'ordre dans lequel apparaissent ces succès et ces échecs (il s'agit d'une branche de l'arbre dans laquelle apparaît k fois la probabilité p et $n - k$ fois la probabilité $1 - p$).

Il ne reste donc plus qu'à déterminer le nombre de branches de l'arbre correspondant à la situation. Ce nombre correspond au nombre de façon de positionner les k succès parmi les n expériences. Placer ces k succès revient à choisir leurs rangs. Cela revient donc à choisir k nombres parmi n les entiers de $[1; n]$, il y en a donc bien $\binom{n}{k}$.

La démonstration en vidéo : [lien](#) ou



Exemple :

La probabilité qu'un candidat qui répond totalement au hasard à l'exercice de QCM (3 questions avec 4 réponses dont une seule bonne) obtienne exactement 2 bonnes réponses est de

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \times 0,25^2 \times 0,75 \approx 14 \, \%.$$

Remarque :

Les fonctions avancées de la calculatrice permettent de calculer ces probabilités :

- pour calculer $P(X = k)$, on utilise binomFdp qui se trouve dans le menu distrib :
- pour calculer $P(X \leq k)$, on utilise binomFRép qui se trouve dans le même menu.



2°) Espérance et variance :

Exemple :

Reprenons la loi de probabilité de notre exemple $\mathcal{B}(3; 0,25)$:

Valeur de $X(x_i)$	0	1	2	3
$P(X = x_i) = p_i$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3$	$3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$	$3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1$	$\left(\frac{1}{4}\right)^3$

L'espérance de cette variable aléatoire est donc de

$$E(X) = 0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 + 1 \times 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 2 \times 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1 + 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 0,75.$$

On remarque que $E(X) = 3 \times 0,25 = np$. Cette constatation peut être généralisée :

Propriété (admise) :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$. Alors

- l'espérance est $E(X) = np$;
- la variance est $V(X) = np(1-p)$.
- l'écart type est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}$.

Remarque :

Plus l'écart-type est petit, plus les valeurs proches de son espérance ont des probabilités grandes.

Exemple :

Pour la loi de probabilité $\mathcal{B}(n; p)$, on a donc

$$E(X) = np = 3 \times 0,25 = 0,75 ;$$

$$\text{mais aussi } V(X) = np(1-p) = 3 \times 0,25 \times 0,75 = 0,5625 \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{0,5625} = 0,75.$$

3°) Diagramme en barres :

Propriété :

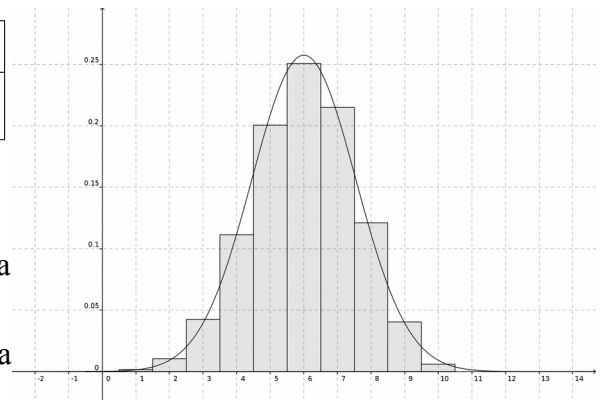
Soit une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

Le diagramme en barres associé à X est en forme de cloche, approximativement centré sur son espérance $E(X)$.

Exemple :

On pioche 10 fois de suite avec remise dans une urne contenant 6 boules rouges et 4 boules noires. On s'intéresse au nombre de boules rouges piochées. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de boules rouges. X suit $\mathcal{B}(10; 0,6)$. On obtient alors $P(X = k) = \binom{10}{k} 0,6^k 0,4^{10-k}$. Avec la calculatrice, la fonction `binomFdp(10,0.6)` donne les valeurs pour $k \in \llbracket 0 ; 10 \rrbracket$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = k)$	0	0	0,01	0,04	0,11	0,2	0,25	0,22	0,12	0,04	0,01



Remarque :

Le diagramme en barres est d'autant plus symétrique que la valeur de p est proche de 0,5.

Le diagramme en barres est d'autant plus étroit et haut que la valeur de $\sigma(X)$ est petite.

4°) Intervalle de fluctuation :

Définition :

Soient X une variable aléatoire suivant une loi binomiale, α un réel de $]0 ; 1[$ et a et b deux réels.

Un intervalle $[a ; b]$ tel que $P(a \leq X \leq b) \geq 1 - \alpha$ est appelé intervalle de fluctuation au seuil de $1 - \alpha$, (ou au risque de α) associé à X .

Exemple :

Dans l'exemple précédent, en regardant le tableau, on constate que $P(X \leq 2) + P(X \geq 10) = 0,02$, donc $P(3 \leq X \leq 9) = 0,98$. On a donc $P(3 \leq X \leq 9) \geq 0,95$, $[3 ; 9]$ est donc un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %, (ou au risque de 5 %) associé à X . Cela signifie concrètement que lors de cette expérience aléatoire, on a au moins 95 % de chance d'obtenir entre 3 et 9 boules rouges.

Remarque :

Pour obtenir un intervalle centré, il faut choisir a et b tels que $P(X < a) \leq \frac{\alpha}{2}$ et $P(X > b) \leq \frac{\alpha}{2}$.

Exemple :

Toujours dans le même exemple, si l'on veut un intervalle de fluctuation centré au seuil de 80 %, on choisira a comme la plus grande valeur de X telle que $P(X < a) \leq 0,1$ (ici $a = 4$) et b comme la plus petite valeur de X telle que $P(X > b) \leq 0,1$ (ici 8) car il faut qu'il reste au moins 0,8 entre a et b . $[4 ; 8]$ est donc un intervalle de fluctuation centré au seuil de 80 %.