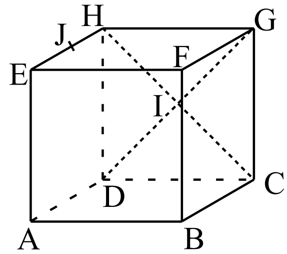
PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

Exercice 1

ABCDEFGH est un cube de côté a. Le point I est le centre de la face DCGH et J est le milieu du segment [EH].



1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ}$.

3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 2

On considère dans un repère orthonormé de l'espace les points A (4 ; 2 ; –3), B (6 ; 4 ; 0), C (7 ; 6 ; –2) et D (5 ; 4 ; –5).

1. Démontrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.

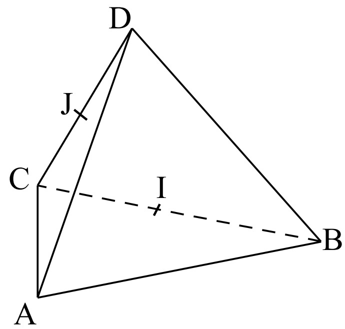
3. Que peut-on en déduire pour le parallélogramme ABCD ?

Exercice 3

ABCD est un parallélogramme tel que AC = 10 et BD = 4. Calculer $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}$.

Exercice 4

ABCD est un tétraèdre régulier d'arête égale à 6. Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes [BC] et [CD].



1. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

2. Calculer $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}$.

3. En déduire l'arrondi au dixième de degré de la mesure de l'angle $\widehat{IAJ}$.

Exercice 5

A et B sont deux points de l'espace tels que AB = 2. Le point I est le milieu du segment [AB].

1. Démontrer que pour tout point M de l'espace : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - 1$.

2. En déduire la nature de l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 2$.

3. Quel est l 'ensemble des points de l'espace tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = -2$?

Exercice 6

Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par le point A (4 ; 8 ; –4) et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix}$.

1. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

2. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{n}$ forment-ils une base orthogonale de l'espace ?

3. Déterminer $\vec{w}$ tel que ($\vec{u}$, $\vec{w}$) soit une base orthogonale du plan $\mathscr{P}$. En déduire une base orthonormée de l'espace.

4. Déterminer un vecteur normal $\vec{n_1}$ au plan $\mathscr{P}$ tel que la troisième coordonnée de $\vec{n_1}$ soit égale à 7.

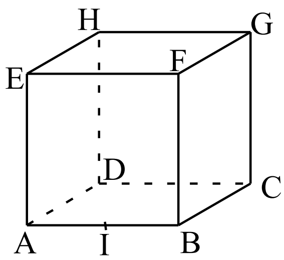
5. Déterminer un vecteur normal $\vec{n_2}$ au plan $\mathscr{P}$ tel que la deuxième coordonnée de $\vec{n_2}$ soit égale à –1.

6. Est-il possible de trouver un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ dont la première coordonnée est égale à 4 ?

7. Quelle est la distance entre le point M (2 ; –3 ; 5) et le plan $\mathscr{P}$.

Exercice 7
On considère, dans un repère orthonormé de l'espace, les points A (7 ; –1 ; 8), B (10 ; 3 ; 6), C(1 ; –2 ; 6) et D (–5 ; 2 ; 4). Les droites (AB) et (CD) sont-elles orthogonales ?

Exercice 8
ABCDEFGH est un cube.



1. a. Rechercher parmi les sommets du cube quatre points équidistants de A et F.

b. Justifier que ces quatre points sont dans un même plan.

2. Soit I le milieu du segment $[AB]$

a. Démontrer que pour tout point M de l'espace, $MA^2 = MB^2$ si, et seulement si, $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

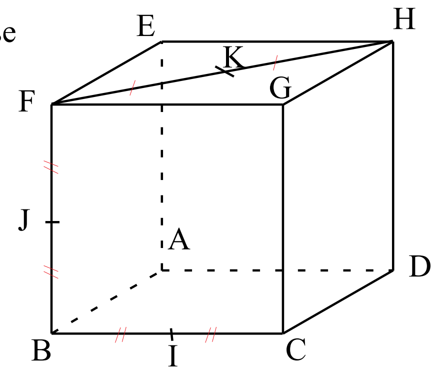
b. En déduire que l'ensemble des points équidistants des extrémités d'un segment est un plan dont on précisera les éléments caractéristiques.

Ce plan est appelé le plan médiateur du segment $[AB]$.

3. Dans le cube, donner le plan médiateur du segment $[AF]$.

Exercice 9
On considère le cube ABCDEFGH de côté 1 représenté ci-contre. On se place dans le repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

On désigne pa I, J et K les milieu respectifs de [BC], [BF] et [FH].



1. Lire les coordonnées des points I, J, G et K.

2. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (IJK).

3. Démontrer que la distance du point G au plan (IJK) est égale à $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

4. On considère le point $L\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4};\dfrac{3}{4}\right)$.

a. Démontrer que $\overrightarrow{IL} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IK}$. Que peut-on en déduire pour le point L ?

b. Démontrer que le point L est le projeté orthogonal du point G sur le plan (IJK).