PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

Un peu d'histoire :

Les concepts sous-jacents à la notion de vecteur apparaissent comme modèles physiques dynamiques longtemps avant leur formalisation. On trouve un concept de force et la composition des forces chez Newton ; ces notions, comme celles de vitesse, sont présentes dans le calcul géométrique de Leibniz. Au XIXe siècle, la notion de vecteur va émerger comme objet algébrique et géométrique, comme transformation ou comme outil de repérage.

Hamilton construit les vecteurs par une approche algébrique. Dans sa théorie des forces et des marées de 1839, Grassmann propose une approche géométrique qui étend à l'espace la notion de vecteur et lui associe des règles de calcul algébrique, notamment un « produit linéaire » utilisant la projection orthogonale et qui deviendra notre produit scalaire. À la fin du siècle, des auteurs proches des mathématiques comme de la physique (Maxwell, Gibbs, Heaviside ou Peano) dégagent les principes du calcul vectoriel à trois dimensions ou plus, lui donnant une dimension dynamique tout en établissant la structure d'espace vectoriel.

I. Produit scalaire dans l'espace :

1°) Rappels et définition :

Rappels :

- $\|\vec{u}\|$ désigne la norme du vecteur $\vec{u}$ (sa « longueur »). En particulier $\|\overrightarrow{AB}\|$ = AB.
- $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est un nombre réel.

Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et A, B et C des points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$. Il existe au moins un plan $\mathscr{P}$ contenant A, B et C. On définit alors le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ comme étant le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans le plan $\mathscr{P}$.

Propriété :

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

Pour les autres cas, on dispose de plusieurs expressions du produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

2°) Expression à l'aide du cosinus :

Propriété :

Pour $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, le produit scalaire est le réel $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})$

ou $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos(\widehat{BAC})$ avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ des représentants respectifs de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Conséquences pour des vecteurs colinéaires :

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens (car cos (0) = 1) ;
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire (car cos (π) = –1).

Propriété :

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

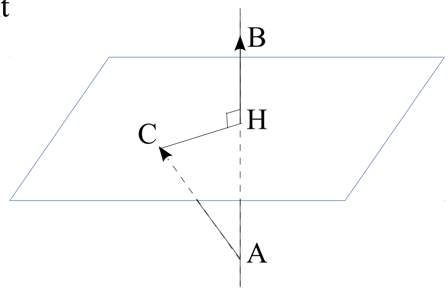
Rappel :

Le carré scalaire du vecteur $\vec{u}$ est : $\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$.

3°) Expression à l'aide des projections :

Définition :

Le projeté orthogonal d'un point P sur une droite $\mathscr{D}$ est le point d'intersection entre $\mathscr{D}$ et sa perpendiculaire passant par P.



Propriété :

H désignant le projeté orthogonal de C sur (AB).

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$

4°) Expression à l'aide des coordonnées dans un repère orthonormal :

Définition :

Une base est orthonormale (ou orthonormée) si ses vecteurs sont de même norme et deux à deux orthogonaux.

Une repère est orthonormal (ou orthonormé) si sa base est orthonormale.

Propriété :

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$,avec $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ on a $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$, et donc $\|\vec{u}\|^2=x^2+y^2+z^2$.

Remarque :

$\|\vec{u}\|$ désignant la norme du vecteur $\vec{u}$, $\|\overrightarrow{AB}\|$ = AB, et donc $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$ ou encore AB = $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$ (avec A $(x_A ; y_A ; z_A)$ et B $(x_B ; y_B ; z_B)$).

5°) Règles de calcul :

Propriétés :

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et le réel k, on a :

1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ (symétrie du produit scalaire)

2) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ et $(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$ (bilinéarité du produit scalaire)

$$\left.\begin{array}{l} \text{3) } (\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2 \\ \text{4) } (\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2 \\ \text{5) } (\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2 \end{array}\right\} \text{(identités remarquables)}$$

6) Formules de polarisation (conséquences des identités remarquables) :

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}((\vec{u}+\vec{v})^2-\vec{u}^2-\vec{v}^2)$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(\vec{u}^2+\vec{v}^2-(\vec{u}-\vec{v})^2)$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{4}((\vec{u}+\vec{v})^2-(\vec{u}-\vec{v})^2)$

Remarques :

- ces trois dernières formules peuvent aussi s'écrire :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right),\ \vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)\ \text{et}\ \vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

- Si ABDC est un parallélogramme tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$, on a $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{u}+\vec{v}$,

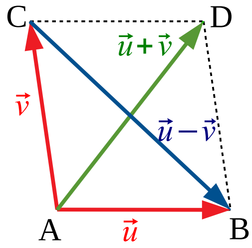
  l'égalité $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$ revient à $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AD^2-AB^2-AC^2\right)$

- Si A, B et C sont trois points du plan tels que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$, on a $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\vec{u}-\vec{v}$,

  l'égalité $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ revient à $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-CB^2\right)$

- Si ABDC est un parallélogramme tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$, on a $\overrightarrow{AD}=\vec{u}+\vec{v}$ et $\overrightarrow{CB}=\vec{u}-\vec{v}$

  l'égalité $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ revient à $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\left(AD^2-BC^2\right)$



Vidéo : comment calculer un produit scalaire dans l'espace : lien ou

II. Orthogonalité dans l'espace :

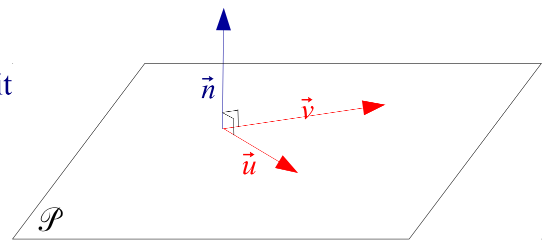
1°) Vecteur normal à un plan :

Définition :

Un vecteur $\vec{n}$ est dit normal au plan $\mathscr{P}$ si et seulement s'il est non nul et orthogonal à tout vecteur de $\mathscr{P}$.

Propriété :

Pour qu'un vecteur $\vec{n}$ soit normal à un plan $\mathscr{P}$, il suffit qu'il soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$.



Propriété :

Soient A un point et $\vec{n}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Remarque :

Deux plans sont parallèles si et seulement s'ils admettent des vecteurs normaux colinéaires.

2°) Orthogonalité d'une droite et d'un plan :

Définition :

Une droite est orthogonale à un plan si ses vecteurs directeurs sont des vecteurs normaux au plan.

Remarque :

Dire qu'une droite $\mathscr{D}$ est orthogonale à un plan $\mathscr{P}$ revient à dire que $\mathscr{D}$ est orthogonale à toute droite de ce plan mais il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes de $\mathscr{P}$ pour être orthogonale à $\mathscr{P}$.

3°) Orthogonalité de deux droites :

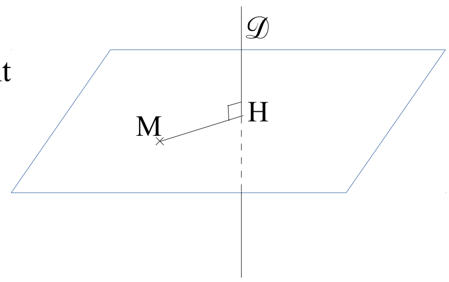
Définition :

Deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

III. Projeté orthogonal et distance :

1°) Projeté orthogonal sur une droite :

Rappel :



Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite $\mathscr{D}$ est le point d'intersection entre $\mathscr{D}$ et sa perpendiculaire passant par M.

Exemple :

Sur la figure ci-contre, H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$.

2°) Distance d'un point à une droite :

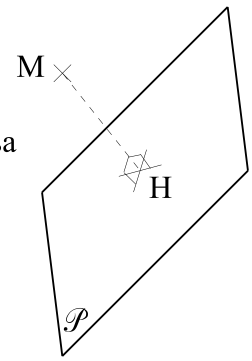
Propriété :

Si H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$, H est le point de $\mathscr{D}$ le plus proche de M.

Définition :

Cette distance MH est alors appelée distance du point M à la droite $\mathscr{D}$.

3°) Projeté orthogonal sur un plan :



Définition :

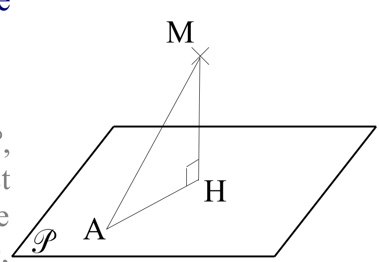
Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan $\mathscr{P}$ est le point d'intersection entre $\mathscr{P}$ et sa perpendiculaire passant par M.

Exemple :

Sur la figure ci-contre, H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$.

Propriété :

Si H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$, H est le point de $\mathscr{P}$ le plus proche de M.



Preuve (exemplaire) :

Soit H un point quelconque de $\mathscr{P}$ distinct de H. (MH) est orthogonale à $\mathscr{P}$, elle est donc orthogonale à toute droite de $\mathscr{P}$, en particulier (MH) est perpendiculaire à (AH), le triangle AMH est donc rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore, $AM^2 = MH^2 + AH^2$. Comme A est distinct de H, AH > 0, donc AM > MH.

La démonstration en vidéo : [lien]() ou

Définition :

Cette distance MH est alors appelée distance du point M au plan $\mathscr{P}$.

Exemple :

Soient un point A (2 ; 1 ; –3) et un plan $\mathscr{P}$ passant par B (0 ; –1 ; 1) et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

Pour calculer la distance entre A et $\mathscr{P}$, Il nous faut calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AH}$, où H est le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$. La distance cherchée est la distance AH.

Appelons x, y et z les coordonnées de H. On a donc $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z+3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}x\\y+1\\z-1\end{pmatrix}$.

De plus $\overrightarrow{AH} \perp \mathscr{P}$ donc $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire à $\vec{n}$, $\overrightarrow{AH}=k\vec{n}$, soit $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}k\\2k\\-k\end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}k\\2k\\-k\end{pmatrix} = \overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z+3\end{pmatrix}$, soit $\begin{cases}k=x-2\\2k=y-1\\-k=z+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=k+2\\y=2k+1\\z=-3-k\end{cases}$. Et donc $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}x\\y+1\\z-1\end{pmatrix} = \overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}k+2\\2k+2\\-k-4\end{pmatrix}$.

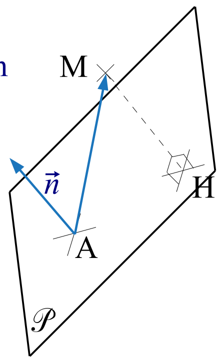
$\vec{n} \perp \mathscr{P}$ donc aussi à tout vecteur de $\mathscr{P}$, en particulier $\overrightarrow{BH}$. Donc $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BH} = 0$,

soit $k + 2 + 2(2k + 2) + k + 4 = 0 \Leftrightarrow 6k + 10 = 0$, donc $k = -\frac{5}{3}$. Donc $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}\frac{-5}{3}\\\frac{-10}{3}\\\frac{5}{3}\end{pmatrix}$.

La distance AH est alors $AH^2 = \left(-\frac{5}{3}\right)^2+\left(-\frac{10}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{150}{9}$, donc $AH = \sqrt{\frac{150}{9}} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$.

Propriété :

Soit $\mathscr{P}$ un plan passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$. Alors la distance d'un point M à un plan $\mathscr{P}$ est $d = \frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.



Preuve :

$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{HM}\cdot\vec{n}=\pm HM\times\|\vec{n}\|$ (formule avec le projeté).

Donc $|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}|=HM\times\|\vec{n}\|$. Donc $\frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{HM\times\|\vec{n}\|}{\|\vec{n}\|} = HM$.

Exemple :

Exemple précédent : Distance entre le point A (2 ; 1 ; –3) et le plan $\mathscr{P}$ passant par B (0 ; –1 ; 1) et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-2\\4\end{pmatrix}\cdot\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = -10$ et $\|\vec{n}\|=\sqrt{6}$, donc $AH = \frac{10}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$.