CONVEXITÉ D'UNE FONCTION

Un peu d'histoire :

Au cours de la seconde guerre punique, en 213 avant notre ère, lors du siège de Syracuse, Archimède aurait inventé des miroirs concaves vers des navires romains pour y concentrer les rayons du soleil et enflammer leurs voiles.

Au début du 19e siècle, la convexité fait l'objet de travaux par Augustin Cauchy. Plus tard, à l'aide de fonctions convexes, des mathématiciens démontrent un grand nombre d'inégalités de convexité. Ainsi, en 1906, Jensen démontre une inégalité qui permet notamment la comparaison entre la moyenne arithmétique te la moyenne géométrique de plusieurs nombres.

Dans les années 1930, Hardy étudie les fonctions convexes. Il consacre son ouvrage Inégalités à l'obtention d'inégalité grâce à la convexité.

I. Fonctions convexes, fonctions concaves :

1°) Définitions :

Définitions :

Une fonction est convexe sur un intervalle I si, et seulement si, pour toute droite (AB), où A et B sont des points de $\mathscr{C}_f$ sur I, sa courbe représentative est située en dessous (AB) entre les points A et B.

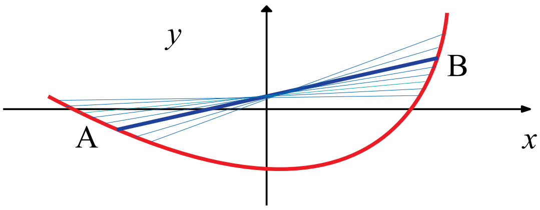
Une fonction est concave sur un intervalle I si, et seulement si, pour toute droite (AB), où A et B sont des points de $\mathscr{C}_f$ sur I, sa courbe représentative est située au-dessus de (AB) entre les points A et B.

Remarque :

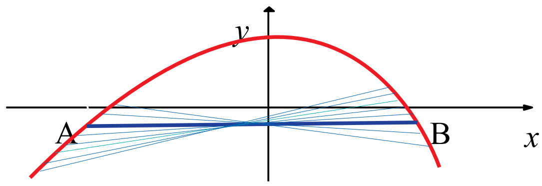
Les droites (AB) ainsi définies s'appellent des sécantes à $\mathscr{C}_f$.

Exemples :

Fonction convexe



Fonction concave

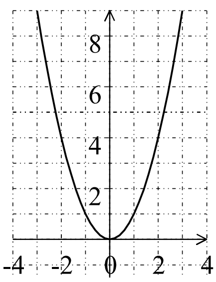


Propriété (admise) :

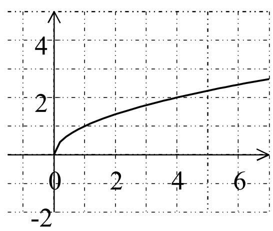
f est convexe sur I si et seulement si $-f$ est concave sur I.

2°)Convexité des fonctions de références :

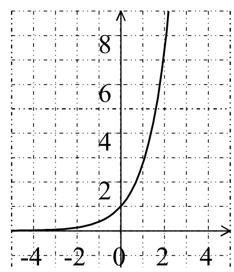
La fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$



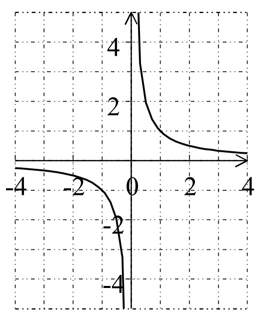
La fonction racine carrée est concave sur $\mathbb{R}_+$



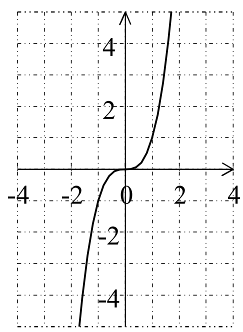
La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$



La fonction inverse est concave sur $\mathbb{R}^{-*}$ et convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$



La fonction cube est concave sur $\mathbb{R}_-$ et convexe sur $\mathbb{R}_+$



II. Convexité et dérivées :

1°) Dérivée seconde :

Définition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Dire que f est deux fois dérivable sur I signifie que $f\,'$ est elle-même dérivable sur I.

La dérivée de $f\,'$, notée $f\,''$, est appelée dérivée seconde de f.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$. Alors $f\,'(x) = 4x^3$ et $f\,''(x) = 12x^2$.

2°) Convexité et dérivées :

Propriétés :

f est une fonction deux fois dérivable sur I

f est convexe sur I si et seulement si :

i. $f\,'$ est croissante sur I ;

ii. $f\,''$ est positive sur I ;

iii. sa courbe représentative est entièrement situé au-dessus de chacune de ses tangentes sur I.

f est concave sur I si et seulement si :

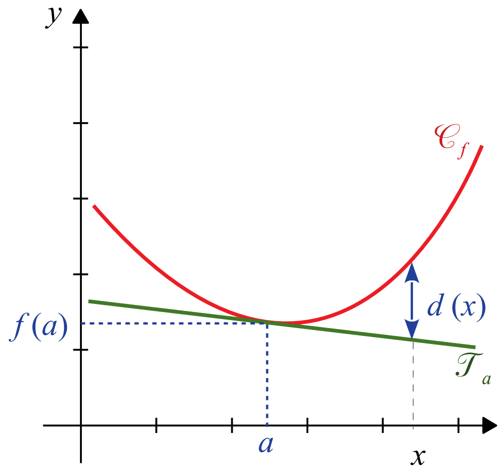
i. $f\,'$ est décroissante sur I ;

ii. $f\,''$ est négative sur I ;

iii. sa courbe représentative est entièrement situé en dessous de chacune de ses tangentes sur I.

Preuve exemplaire : « Si $f\,''$ est positive, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes ».

Soit une fonction f, deux fois dérivable sur I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Soit $a \in I$ et $\mathscr{T}_a$ la tangente à C_f en a. L'équation de $\mathscr{T}_a$ est donc $y = f\,'(a)\,(x - a) + f(a)$.



On considère la fonction d sur I et définie par :

$d\,(x) = f(x) - f\,'(a)\,(x - a) - f(a)$.

d est deux fois dérivable sur I comme différence de deux fonctions deux fois dérivables (f et une fonction affine).

Alors : $d'(x) = f\,'(x) - f\,'(a)$ et $d\,''(x) = f\,''(x)$.

Or, comme $f\,''$ est positive sur I, d'' aussi et donc $d\,'$ est croissante sur I.

De plus, $d'(a) = 0$, donc d' est négative pour $x \leqslant a$ et positive pour $x \geqslant a$.

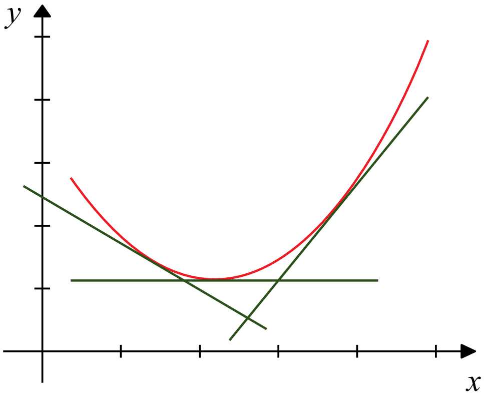
Donc $d\,(x)$ est décroissante pour $x \leqslant a$ et croissante pour $x \geqslant a$.

Or, $d\,(a) = f(a) - f\,'(a)\,(a - a) - f(a) = 0$, donc $d\,(x) \geqslant 0$ sur I, soit $f(x) \geqslant f\,'(a)\,(x - a) + f(a)$, ce qui signifie bien que la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes sur I (et donc que f est convexe sur I).

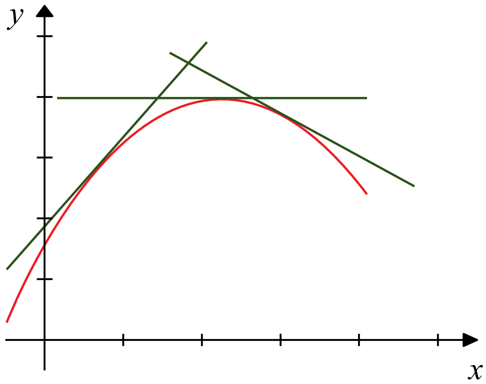
x		a	
$d\,''(x)$	$+$		$+$
$d\,'(x)$	↗	0	↗
$d\,'(x)$	$-$	0	$+$
$d\,(x)$	↘	0	↗
$d\,(x)$	$+$	0	$+$

Exemples :

Fonction convexe :



Fonction concave :



Étude de la convexité :

graphiquement :

lien

ou :

ou par le calcul :

lien

ou :

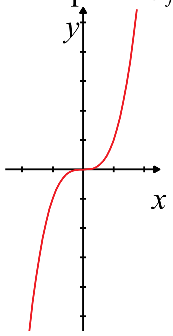
3°) Point d'inflexion :

Définition :

Soient f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative sur I. Soient A $(a\,;f(a))$ un point de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{T}_a$ sa tangente en A. On dit que A est un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$ si, au point A, $\mathscr{T}_a$ traverse $\mathscr{C}_f$.

Exemple :

La fonction cube ($x \longmapsto x^3$) possède un point d'inflexion en 0.



Reconnaître graphiquement un point d'inflexion : lien ou

Propriété :

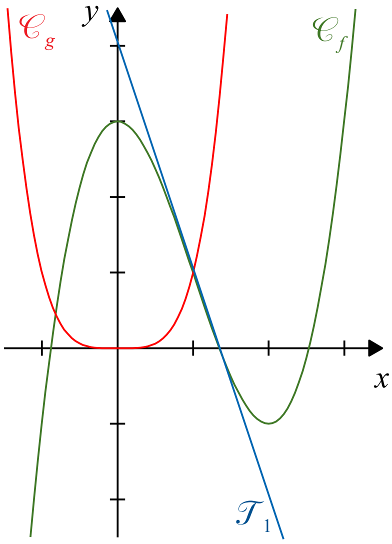
Pour que A $(a\,;f(a))$ soit un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$, courbe représentative de la fonction f, il faut que f change de convexité en a, c'est-à-dire que f' change de sens de variation en a, ou encore que f'' s'annule en changeant de signe en a.

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Graphiquement, il semble y avoir un point d'inflexion en $x = 1$. Prouvons-le par le calcul :

$f'(x) = 3x^2 - 6x$ et $f''(x) = 6x - 6$. f'' est une fonction affine avec coefficient directeur positif, elle est donc négative, s'annule en 1 et ensuite est positive. Elle change donc de signe en 1, $\mathscr{C}_f$ possède donc un point d'inflexion en 1.



Remarque :

Il faut impérativement vérifier que la dérivée seconde change de signe, le fait qu'elle s'annule ne suffit pas. Par exemple, pour la fonction $g(x) = x^4$, $g'(x) = 4x^3$ et $g''(x) = 12x^2$. $g''(0) = 0$, mais $g''(x)$ reste positive sur $\mathbb{R}$, $\mathscr{C}_g$ n'admet donc pas de point d'inflexion.