VECTEURS DE L'ESPACE

Histoire des maths :

Les concepts sous-jacents à la notion de vecteur apparaissent comme comme modèles physiques dynamiques longtemps avant leur formalisation. On trouve un concept de force et la composition des forces chez Newton ; ces notions sont présentes dans le calcul géométrique de Leibniz. Au XIXe siècle, la notion de vecteur va émerger comme objet algébrique et géométrique, comme transformation ou comme outil de repérage. Hamilton construit les vecteurs par une approche algébrique, Grassman propose une approche géométrique qui étend à l'espace la notion de vecteur et lui associe des règles de calcul algébrique.

Pour prendre un bon départ du chapitre 9 : lien ou

I. Vecteurs de l'espace :

1°) Introduction :

Les définitions et propriétés des vecteurs du plan s'étendent à l'espace.

Comme dans le plan, à tout couple de points A et B de l'espace, on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Lorsque A $\neq$ B, **la direction** de $\overrightarrow{AB}$ est celle de la droite (AB), **le sens** de $\overrightarrow{AB}$ est le sens de A vers B et la **norme** de $\overrightarrow{AB}$, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, est la distance AB.

Lorsque A = B, $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur nul, noté $\vec{0}$.

On désigne souvent les vecteurs par une seule lettre, par exemple $\vec{u}$, $\vec{v}$, …

Pour tout point O de l'espace et pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point A tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$.

2°) Vecteurs égaux :

Chacune des propriétés suivantes signifie que les vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux :

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction, même sens et même norme.
- ABDC est un parallélogramme, c'est à dire [AD] et [BC] ont même milieu (si A, B, C et D sont alignés, on dit que ABDC est un parallélogramme aplati).

3°) règles de calcul :

Les règles de calcul sur les vecteurs de l'espace sont analogues aux règles de calcul sur les vecteurs du plan.

- **Relation de Chasles :**

  Pour tous points A, B et C de l'espace, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

- **Multiplication d'un vecteur par un réel :**

  Pour tous réels a et b, et pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

  Le vecteur $a\vec{u}$ est un vecteur qui a la même direction que $\vec{u}$, le même sens que $\vec{u}$ si $a > 0$ et de sens contraire à $\vec{u}$ si $a < 0$, et dont la norme est celle de $\vec{u}$ multipliée par $|a|$.

  $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$; $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$;

  $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$; $a\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow a = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$ etc …

4°) Combinaison linéaire :

Définition :

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et deux réels α et β. Le vecteur $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ est appelé combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Remarques :

On définit de la même façon une combinaison linéaire de 3 vecteurs ou plus.

On dit aussi que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires (*voir V. 1°) pour plus de détails*).

Si $\beta = 0$, on obtient $\vec{w} = \alpha\vec{u}$ et on dit alors que les vecteur $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

Exemples :

Le vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = 3\vec{u} - 5\vec{v}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AD} - 7\overrightarrow{EF}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EF}$.

Exemple :

Voir le lien, ou pour un exemple illustré.

II. Droites et plans de l'espace :

1°) Vecteurs colinéaires :

Définition :

Des vecteurs colinéaires sont des vecteurs de même direction.

Propriétés :

● Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe deux réels a et b non tous nuls ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$) tels que $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$.

● Le vecteur nul est colinéaire avec tous les autres vecteurs.

Démonstration :

● Si $a \neq 0$, $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = -\frac{b}{a}\vec{v}$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction.

● Quel que soit le vecteur $\vec{u}$, $0\vec{u} + 3\vec{0} = \vec{0}$, donc $\vec{u}$ et $\vec{0}$ sont colinéaires.

Exemple :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\vec{u} - 2\vec{v} = \vec{0}$, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2°) Droites de l'espace :

Définition :

Une droite de l'espace est définie :

● soit par deux points distincts, la droite est alors notée (AB) par exemple ;

● soit par un point et un vecteur non nul, appelé vecteur directeur de la droite. La droite est alors noté $(\mathrm{A}; \vec{u})$ par exemple.

Propriété :

La droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

C'est-à-dire : $\mathrm{M} \in (\mathrm{A}; \vec{u}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\vec{u}$, $k \in \mathbb{R}$.

3°) Plans de l'espace :

Définition :

Un plan de l'espace est défini :

- soit par trois points non alignés, le plan est alors noté (ABC) par exemple ;
- soit par un point et deux vecteurs **non colinéaires**, appelés vecteurs directeurs du plan. Le plan est alors noté $(A;\vec{u},\vec{v})$ par exemple.

Propriété :

Le plan $(A;\vec{u},\vec{v})$ (passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

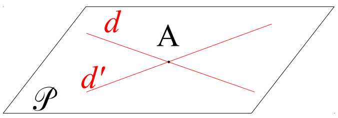
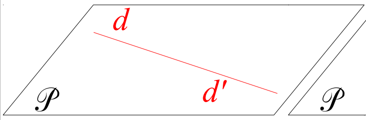
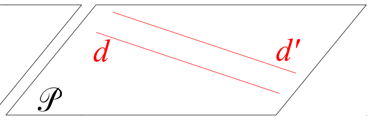
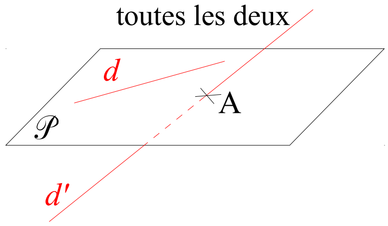
C'est-à-dire : $M \in (A;\vec{u},\vec{v}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

III. Positions relatives de droites et de plans de l'espace :

1°) Position relative de deux droites :

Propriété :

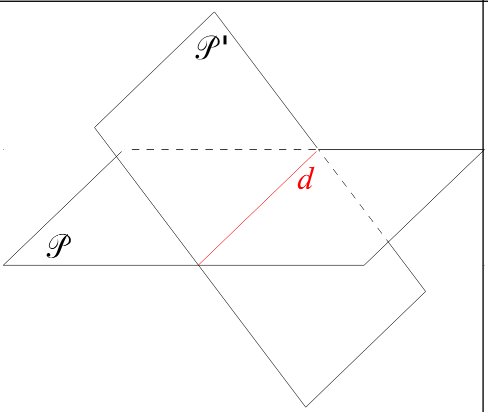
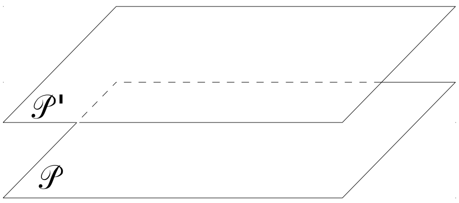
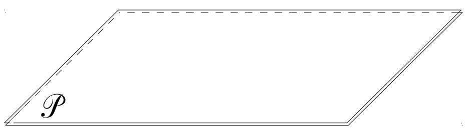
Deux droites d et d' de l'espace sont soit non coplanaires (il n'existe aucun plan contenant ces deux droites), soit coplanaires (il existe un plan contenant ces deux droites). Elles sont alors sécantes ou parallèles dans ce plan.

Coplanaires			**non coplanaires**
sécantes 	parallèles 		aucun plan ne les contient toutes les deux 
$d \cap d' = \{A\}$	$d = d'$ confondues	$d \cap d' = \emptyset$ strictement parallèles	$d \cap d' = \emptyset$

Ainsi, deux droites de l'espace n'ayant pas de point commun sont soit **strictement parallèles** soit **non coplanaires**.

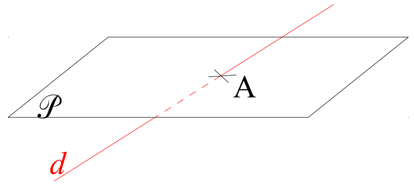
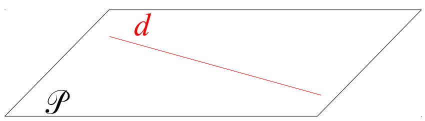
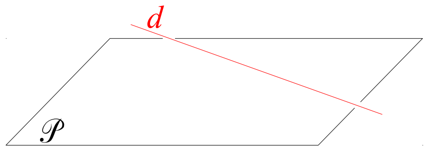
2°) Position relative de deux plans :

$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont deux plans de l'espace. Il n'existe que trois possibilités :

sécants	**Parallèles**	
	strictement parallèles 	$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont confondus 
$\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = d$	$\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \emptyset$	$\mathscr{P} = \mathscr{P}'$

3°) Position relative d'une droite et d'un plan :

Une droite d et un plan $\mathscr{P}$ de l'espace sont soit **sécants**, soit **parallèles**.

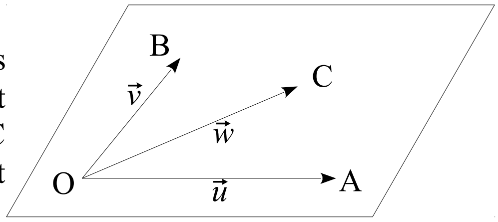
Sécants	**Parallèles**	
		
$\mathscr{P} \cap d = \{A\}$	$d \subset \mathscr{P}$	$\mathscr{P} \cap d = \varnothing$

IV. Bases et repères de l'espace :

1°) Vecteurs coplanaires :

Définition :

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'ils ont des représentants appartenant à un même plan, autrement dit si, en choisissant un point O quelconque de l'espace et en définissant les points A, B et C tels que $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{OC}=\vec{w}$, les points O, A, B et C sont coplanaires.



Propriété :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, c'est-à-dire s'il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$.

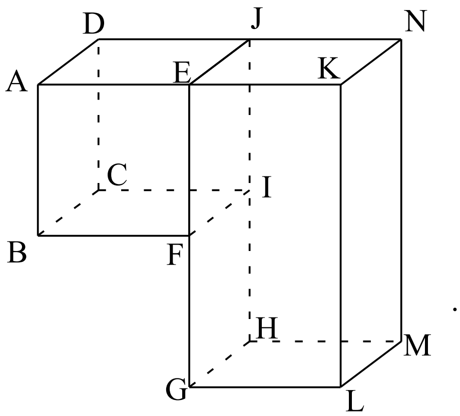
Idée de preuve :

Soient un point O de l'espace et les points A, B et C tels que $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{OC}=\vec{w}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, ce sont donc deux vecteurs directeurs du plan $\mathscr{P}$ = (OAB) = $(O;\vec{u},\vec{v})$. Dire que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires revient à dire que $C \in \mathscr{P}$.

Exemple :

Dans la figure ci-contre, ABCDEFIJ est un cube EGHJKLMN est un parallélépipède rectangle tel que HM = CI et JH = 2JI. $\overrightarrow{LM}+2\overrightarrow{LF}=\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{LA}=\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{LD}$ donc $\overrightarrow{LD}=\overrightarrow{LM}+2\overrightarrow{LF}$, donc $\overrightarrow{LD}$, $\overrightarrow{LM}$ et $\overrightarrow{LF}$ sont coplanaires (donc L, M, F et D sont coplanaires).



Remarque :

On peut aussi dire que trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'il existe trois réels α, β et γ non tous nuls tels que $\alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} + \gamma\,\vec{w} = \vec{0}$. Dans ce cas, inutile de se soucier du fait que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Remarque :

Le vecteur nul est coplanaire avec toute paire de vecteurs.

2°) Décomposition d'un vecteur dans une base :

Définition :

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de l'espace si et seulement s'ils ne sont pas coplanaires. On note $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ cette base.

Propriété :

Soit $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ une base de l'espace.

Pour tout vecteur $\vec{t}$, il existe un unique triplet (a ; b ; c) de nombres réels tels que : $\vec{t}=a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}$.

Exemple :

Dans la figure ce-dessus, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont non coplanaires, C'est-à-dire $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace.

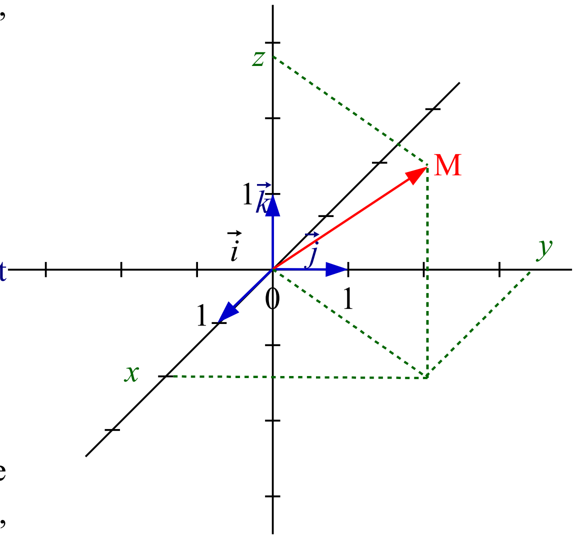
On a $\overrightarrow{JL} = \overrightarrow{JE} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GL} = -\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$. $\overrightarrow{JL}$ se décompose donc en $\overrightarrow{JL} = -\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$.

Pour s'entraîner : lien ou

3°) Repère de l'espace et coordonnées :

Définition :

Soient $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace et O un point de l'espace, alors $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **un repère** de l'espace .



Propriété :

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace.

À tout point M de l'espace, on peut associer un unique triplet de réels (x ; y ; z) tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Vocabulaire :

On dit que (x ; y ; z) sont les **coordonnées** du point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. x , y et z sont respectivement **l'abscisse**, **l'ordonnée** et **la cote** du point M.

Définition :

On note que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ les **coordonnées** du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. x , y et z s'appellent **première**, **deuxième** et **troisième coordonnées** du vecteur.

4°) Propriétés :

Les propriétés et les règles de calcul vues dans le plan pour les coordonnées de vecteurs et de points se prolongent dans l'espace en ajoutant simplement une troisième coordonnée.

Dans un repère donné de l'espace, soit $\vec{u}$ (a ; b ; c) et $\vec{v}$ (a' ; b' ; c') deux vecteurs, A(x ; y ; z) et B(x' ; y' ; z') deux points.

- Pour tout réel k, le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées (ka ; kb ; kc)
- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées ($a + a'$; $b + b'$; $c + c'$)
- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow a = a', b = b'$ et $c = c'$.
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées ($x' - x$; $y' - y$; $z' - z$)
- Le milieu I de [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{x+x'}{2}; \frac{y+y'}{2}; \frac{z+z'}{2}\right)$.
- les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles
- …