# LIMITES DE FONCTIONS

## I. Limites et asymptotes :

### 1°) Limites infinie en +∞ ou en –∞ :

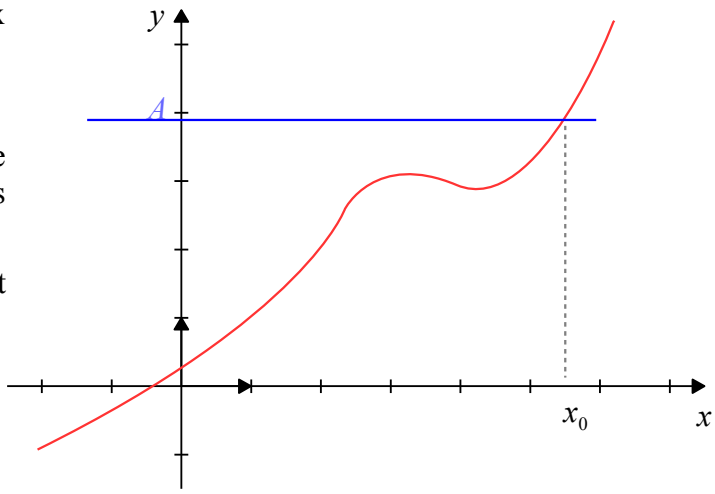
Les définitions vues pour les suites s'étendent aux fonctions :

**Définition :**

Dire qu'une fonction $f$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, signifie que tout intervalle $]A\ ;\ +\infty[$ avec $A$ réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ assez grand.

C'est à dire que pour tout $A$ réel, il existe $x_0$ appartenant à $\mathbb{R}$ tel que pour tout $x > x_0$ on a $f(x) > A$.

Sur la figure, on a $f(x) > A$ dès que $x > x_0$.




**Notation :**

On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

**Définition :**

De même, dire qu'une fonction $f$ a pour limite $-\infty$ en $+\infty$, signifie que tout intervalle $]-\infty\ ;\ A[$ avec $A$ réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ assez grand.

**Notation :**

On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

**Exemple :**

À l'aide de la définition, montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

Soit $A$ un réel positif. Pour que $x^2 > A$, il suffit que $x > \sqrt{A}$. Donc pour tout réel $x$ assez grand, ici supérieur à $\sqrt{A}$, tous les $f(x)$ se trouvent dans $]A\ ;\ +\infty[$.

**Théorème :**

Limites de référence (admis)

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} |x| = +\infty$.

De façon analogue, on peut définir la limite en $-\infty$ :

$\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} |x| = +\infty$.

Pour tout entier naturel $n$ non nul, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$.

Pour tout entier naturel $n$ pair non nul, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$.

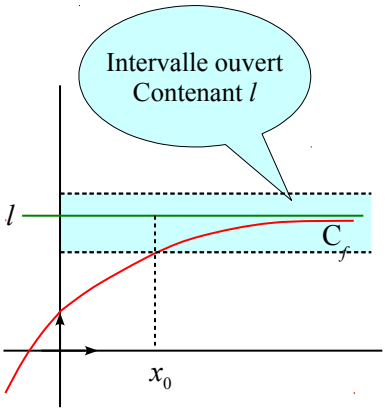
Pour tout entier naturel $n$ impair, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

### 2°) Limite finie en l'infini :

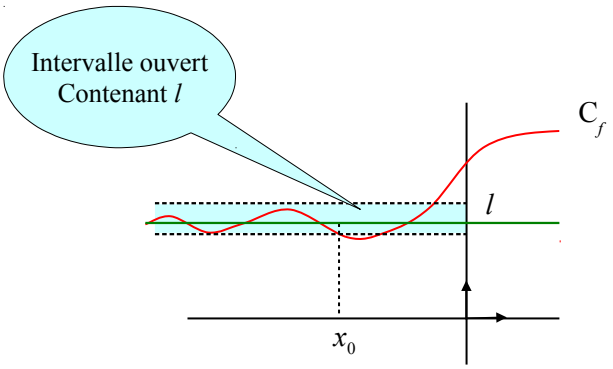
**Définition :**

Soit $l$ un réel. Dire qu'une fonction $f$ a pour limite $l$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant $l$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ assez grand.



**Notation :**

On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.




**Remarque :**

On a une définition analogue en $-\infty$.

**Théorème :** (limites de référence)

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ ;

Pour tout entier naturel $n$ non nul, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n}$

**Définition :**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \Leftrightarrow$ la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe représentative de $f$.

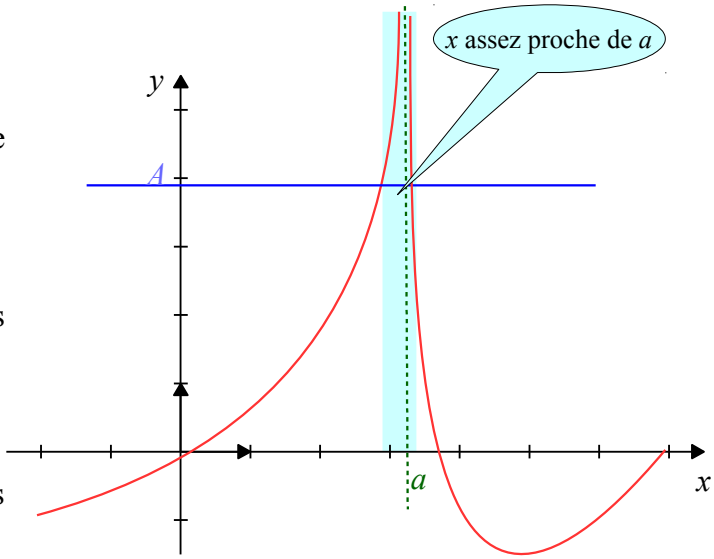
**Exemple :**

Voir les deux graphiques ci-dessus.

### 3°) Limite infinie en une valeur $a$ ($a \in \mathbb{R}$) :

**Définition :**

Dire qu'une fonction $f$ a pour limite $+\infty$ en $a$, signifie que tout intervalle $]A\ ;\ +\infty[$ avec $A$ réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ assez proche de $a$.




On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Sur la figure, on a $f(x) > A$ dès que $x$ est assez proche de $a$.

On note $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$.

On a la même définition lorsque $x$ tend vers $a$ par des valeurs supérieures à $a$.

On note $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$.

On a également les mêmes définitions et notations lorsque $f(x)$ tend vers $-\infty$ :

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.

**Remarque :**

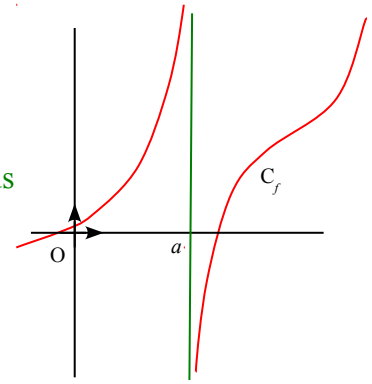
Dans le cas où $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, on dit que la limite en $a$ de $f$ n'existe pas.

Dans le cas où $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, on dit que la limite en $a$ de $f$ existe et est égale à la limite à droite et à gauche en $a$.

**Exemple :**

Pour la fonction dont nous avons la représentation graphique ci–contre, nous avons

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = -\infty$



**Théorème :**

Limites de référence (admis)

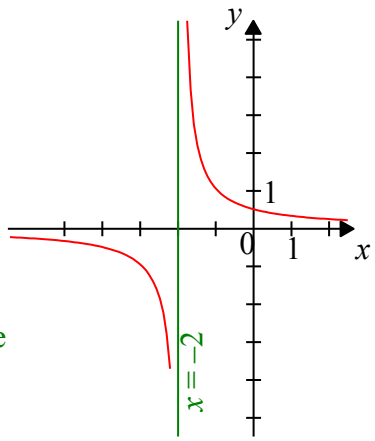
$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ ;

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ ; $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$.

**Définition :**

Soit $f$ une fonction telle que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$.

On dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe $C_f$.




**Exemple :**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par $f(x) = \frac{1}{x+2}$.

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$.

Conséquence pour la courbe : la droite d'équation $x = -2$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction $f$.

## *II. Opérations sur les limites :*

### 1°) Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient :

Les résultats sont les mêmes que ceux obtenus pour les limites de suites, que l'on fasse la limite de fonction en $+\infty$, mais également en $-\infty$ ou en un nombre.

Pour vous entraîner : lien 1 ou lien 2 ou

### 2°) Composée de deux fonctions :

**Propriété (admise) :**

Soient deux fonctions : $u$ définie de $I$ dans $J$ et $f$ de $J$ dans $\mathbb{R}$.

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(u(x)) = c$.

**Exemples :**

$\lim\limits_{x\to 2^+} x-2 = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to 1} x^2+x+2 = 4$ et $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$ donc $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x^2+x+2} = 2$.

Pour vous entraîner : lien ou

### 3°) Polynômes et fonctions rationnelles :

**Exemple : fonction polynôme**

Méthode pour lever une indétermination : factoriser par le terme de plus haut degré.

Soit $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3 = 5x^3\left(1 - \frac{2}{5x} + \frac{3}{5x^3}\right)$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{2}{5x} + \frac{3}{5x^3}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (par multiplication des limites).

**Exemple : fonction rationnelle**

Méthode pour lever une indétermination : factoriser par le terme de plus haut degré le numérateur et le dénominateur puis simplifier.

$$\text{Soit } f(x) = \frac{2x^3 - x + 2}{x^2 - 1} = \frac{2x^3\left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2x^3}{x^2}\,\frac{1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 2x\,\frac{1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^2}}.$$

On constate que la fraction de droite tend vers 1. La limite de $f$ est donc la même que celle de $2x$. L'indétermination est levée.

Regarder aussi la méthode 8 p 61 de votre livre

## *III. Théorèmes de comparaison :*

### 1°) Théorème des gendarmes :

**Théorème :**

Soient $f$, $g$, $h$ trois fonctions et $L$ un réel.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = L$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = L$ et si pour $x$ assez grand $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

**Preuve :**

Soit I un intervalle contenant $L$.

Pour $x$ assez grand on a à la fois $g(x) \in$ I, $h(x) \in$ I et $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$.

On en déduit que $f(x) \in$ I, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ L.

**Remarque :**

Ce théorème s'étend au cas où $x$ tend vers un nombre $a$.

**Exemple :**

Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin(3x)}{x^2}$. Déterminer sa limite en $+\infty$.

Comme $-1 \leqslant \sin(3x) \leqslant 1$, on a $-\dfrac{1}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ ; or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x^2} = 0$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

### 2°) Comparaison à l'infini :

**Théorème :**

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et si pour $x$ assez grand $g(x) \leqslant f(x)$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ et si pour $x$ assez grand $g(x) \geqslant f(x)$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

**Remarque :**

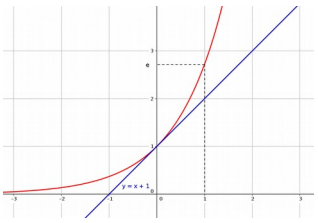
On a évidemment les propriétés analogues en $-\infty$.

### 3°) Croissances comparée :

**Propriété :**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$.

**Preuve de la première limite (exemplaire) :**



Pour tout réel $X$, on sait que $X < e^X$ (voir graphique ci-contre où $x + 1 \leqslant e^x$).

On pose $X = \dfrac{x}{n+1}$, l'inégalité précédente nous donne donc $\dfrac{x}{n+1} \leqslant e^{\frac{x}{n+1}}$.

La fonction $t \longmapsto t^{n+1}$ étant croissante sur $[0 ; +\infty[$, on peut donc écrire :

pour tout $x \in ]0 ; +\infty[$, $\left(\dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1} \leqslant \left(e^{\frac{x}{n+1}}\right)^{n+1}$, c'est-à-dire $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \leqslant e^x$.

En divisant les deux membres par $x^n$, on obtient : $\dfrac{x}{(n+1)^{n+1}} \leqslant \dfrac{e^x}{x^n}$ (car $x^n > 0$ sur $]0 ; +\infty[$).

Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $(n + 1)^{n+1}$ est une constante et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{(n+1)^{n+1}} = +\infty$, et donc, par comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.

**<u>En conclusion :</u>**

Pour déterminer la limite d'une fonction, on dispose de plusieurs méthodes :

- Appliquer les règles sur les opérations (addition, multiplication, division) ;
- Reconnaître la limite de la composée de deux fonctions ;
- Utiliser les théorèmes de comparaison ;
- Procéder à des changements d'écriture (factoriser, multiplier par l'expression conjuguée, … ) …