LIMITES DE SUITES

I. Limite de suites :

a) Suites convergentes :

Définition :

Soit (u_n) une suite et L un nombre réel.

On dit que (u_n) admet pour limite L si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit alors que la suite (u_n) est convergente et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ ou $\lim (u_n) = L$.

Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

Propriétés :

- Si une suite est convergente, sa limite est unique.
- Les suites $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, … , $\frac{1}{n^k}$ avec $k > 0$ convergent vers 0.
- La suite q^n avec $-1 < q < 1$ converge vers 0.

Preuve de la limite de $u_n = \frac{1}{n^2}$:

Soit un intervalle quelconque ouvert contenant 0 : I = $]-\varepsilon', \varepsilon[$, où ε et ε' sont deux réels positifs. $u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$, donc $u_n > -\varepsilon'$.

$u_n < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$.

Donc, pour tout $n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$, on a $u_n < \varepsilon$, soit $u_n \in$ I, donc lim $(u_n) = 0$.

Remarque :

Pour démontrer qu'une suite tend vers une limite finie L, on peut en fait remplacer « tout intervalle ouvert contenant L » par « tout intervalle ouvert centré en L », qui s'écrit donc sous cette forme : $]L - \varepsilon ; L + \varepsilon[$.

b) Suites à limite infinie :

Définition :

On dit qu'une suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si tout intervalle du type $]A ; +\infty[$ (respectivement $]-\infty ; A[$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$).

Propriétés :

- Les suites $\sqrt{n}$, n, n^2, ... , n^k avec $k > 0$ admettent pour limite $+\infty$.

Preuve de la limite de $u_n = n^2$:

Soit un intervalle quelconque I = $]A ; +\infty[$.

$u_n > A \Leftrightarrow n^2 > A \Leftrightarrow n > \sqrt{A}$.

Donc, pour tout $n > \sqrt{A}$, on a $u_n > A$, soit $u_n \in$ I, donc lim $(u_n) = +\infty$.

Remarque :

Si une suite a une limite infinie, alors elle est divergente. Mais il existe des suites divergentes qui n'ont pas de limite (finie ou infinie) comme la suite définie par $u_n = (-1)^n$.

Exemple :

Voir méthode 3 p 19, puis pour s'entraîner : lien 1 ou lien 2 ou et lien 3 ou

II. Opérations sur les limites :

1°) Sommes :

limite de (u_n)	L_1	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
limite de (v_n)	L_2	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
limite de $(u_n)+(v_n)$	L_1+L_2	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**FI**

2°) Produits :

limite de (u_n)	L_1	$L \neq 0$	$\pm\infty$	0
limite de (v_n)	L_2	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
limite de $(u_n \times v_n)$	L_1L_2	$\pm\infty$ (règle des signes)	$\pm\infty$ (règle de signes)	**FI**

3°) Quotients :

limite de u_n	L_1	L	$\pm\infty$	$L\neq 0$	$\pm\infty$	0
limite de v_n	$L_2\neq 0$	$\pm\infty$	L	0^+ ou 0^-	$\pm\infty$	0
limite de $\frac{u_n}{v_n}$	$\frac{L_1}{L_2}$	0	$\pm\infty$ (règle des signes)	$\pm\infty$ (règle des signes)	**FI**	**FI**

Exemples (et modèle de rédaction) :

Soient les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies respectivement sur $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ par

$$u_n = n + \frac{1}{n},\ v_n = n^2\sqrt{n} \text{ et } w_n = \frac{3}{\frac{1}{n}}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = +\infty$ par somme de limites

$\lim\limits_{x\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n = +\infty$ par produit de limites

$\lim\limits_{x\to+\infty} 3 = 3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{n} = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} w_n = +\infty$ par quotient de limites

Exemple :

Voir méthode 4 p 21, puis pour s'entraîner : ce lien ou

Remarque :

FI signifie « forme indéterminée ». Cela signifie qu'on ne peut pas connaître la limite de la somme, du produit ou du quotient juste à l'aide des limites de (u_n) et de (v_n). **Mais FI n'est pas une réponse**, il faut effectuer une étude plus en détail de la suite pour pouvoir trouver sa limite. C'est ce qu'on appelle « lever l'indéterminée ».

Exemple :

Voir méthode 5 p 21

III. Théorèmes de comparaison :

Théorèmes : soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites.

- Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim (u_n) = +\infty$, alors $\lim (v_n) = +\infty$.
- Si $v_n \leqslant u_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim (u_n) = -\infty$, alors $\lim (v_n) = -\infty$.
- Si $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim (u_n) = \lim (v_n) = L$, alors $\lim (w_n) = L$.

(théorème des gendarmes pour les suites)

- Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, si $\lim (u_n) = L$ et si $\lim (v_n) = L'$, alors $L \leqslant L'$.

Démonstration du premier point (exemplaire) :

$\lim (u_n) = +\infty$ signifie que tout intervalle du type $]A\ ;\ +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Autrement dit, quel que soit $A \in \mathbb{R}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n > n_0$, $u_n \in]A\ ;\ +\infty[$, c'est-à-dire $u_n > A$.

$u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang signifie qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $u_n \leqslant v_n$.

En notant N le plus grand des deux nombres n_0 et n_1, on obtient $A < u_n \leqslant v_n$, donc $v_n \in]A\ ;\ +\infty[$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} v_n = +\infty$.

Démonstration animée : ce lien ou

Exemple (pour le théorème des gendarmes) :

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$. $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$, donc $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\cos(n)}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$. On a donc $-\dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim (u_n) = 0$.

Exemples :

Voir les méthodes 6 et 7 p 23, puis pour s'entraîner : ce lien ou

IV. Limite en l'infini de q^n, q réel :

Propriété :

q désigne un nombre réel.

- Si $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$;
- Si $q = 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$;
- Si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$;
- Si $q \leqslant -1$, q^n n'a pas de limite ;

Preuve du premier point (exemplaire) :

Commençons par rappeler l'inégalité de Bernoulli démontrée au chapitre « récurrence » :

Soit a un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$.

Ensuite, comme $q > 1$, il existe $a > 0$ tel que $q = 1 + a$, donc $q^n = (1 + a)^n \geqslant 1 + na$.

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + na = +\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ quand $q > 1$.

Démonstration animée : ce lien ou

Exemple :

La suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \left(\frac{7}{8}\right)^n$ tend vers 0 car elle est de la forme q^n avec $q = \frac{7}{8}$ et $-1 < \frac{7}{8} < 1$.

Voir aussi méthode 8 p 25, puis pour s'entraîner : ce lien ou

V. Minoration, majoration :

1°) Suites minorées, majorées, bornées :

Définition :

Dire qu'une suite (u_n) est majorée signifie qu'il existe un réel M tel que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.

Dire qu'une suite (u_n) est minorée signifie qu'il existe un réel m tel que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geqslant M$.

Dire qu'une suite (u_n) est bornée signifie qu'elle est minorée et majorée.

Exemple :

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$, définie par $u_n = 3 + \frac{1}{n}$.

$0 < \frac{1}{n} \leqslant 1$, donc $3 < u_n \leqslant 4$, c'est-à-dire que (u_n) est minorée par 3 et majorée par 4, elle est donc bornée.

Remarque :

4,1 ; 10 ; 1000 sont aussi des majorants de (u_n).

2°) Propriétés des suites convergentes :

Propriété :

Une suite convergente est bornée.

Remarque :

La réciproque est fausse. Un contre exemple : $(-1)^n$.

Conséquence :

Une suite non bornée ne peut pas converger (c'est la contraposée de la propriété).

Propriété :

Si une suite (u_n) est majorée par M (M réel) et converge vers un réel L, alors $L \leqslant M$.

Propriété :

Si une suite (u_n) est minorée par m (m réel) et converge vers un réel L, alors $L \geqslant m$.

2°) Théorèmes de convergence :

Propriétés (admises) :

- Si une suite est croissante et majorée, alors elle est convergente.
- Si une suite est décroissante et minorée, alors elle est convergente.

Remarque :

Ces théorèmes permettent de savoir qu'une suite converge, mais ne donnent pas sa limite.

Exemple :

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$, définie par $u_n = 3 + \frac{1}{n}$.

Cette suite est décroissante. De plus, n étant positif, $u_n \geqslant 0$, donc (u_n) est minorée par 0.

On en conclu que (u_n) converge, mais ce n'est pas forcément vers 0 (en fait elle converge vers 3).

Exemple :

Voir méthode 9 p 25, puis pour s'entraîner : ce lien ou

3°) Suite croissante et convergente :

Propriété :

Si une suite est croissante et converge vers L, alors $u_n \leqslant L$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Preuve :

Raisonnons par l'absurde : Supposons qu'il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > L$. Comme (u_n) est croissante, si $n > n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0}$ et donc $u_n \notin]L-1\ ;\ u_{n_0}[$ qui est un intervalle ouvert contenant L, ce qui signifie que (u_n) ne converge pas vers L.

Donc $u_n \leqslant L$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

4°) Suite croissante non majorée :

Propriété :

Une suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

Preuve (exemplaire) :

Soit un réel A quelconque. La suite (u_n) n'étant pas majorée, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > A$. De plus (u_n) est croissante, donc pour tout $n > n_0$, $u_n > u_{n_0} > A$, ce qui prouve que (u_n) tend vers $+\infty$.

Démonstration animée : ce lien ou

Remarque :

Une suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.