FONCTIONS COMPOSÉES

I. Fonctions composées

1°) Définition :

Définition :

Soient u et v deux fonctions agissant respectivement de I dans J et de J dans K (I, J et K étant des intervalles réels) :

$u : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ et $v : \mathrm{J} \to \mathrm{K}$

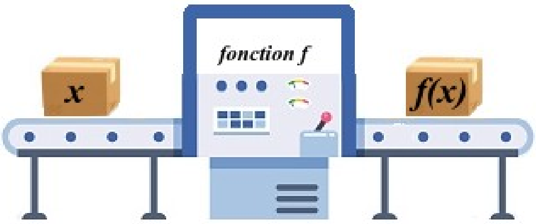
alors la fonction composée de u par v est la fonction noté $v \circ u$ définie sur I par $v \circ u\,(x) = v\,(u\,(x))$.

On appelle alors « schéma de composition » de la fonction $u \circ v$ un schéma de ce type :

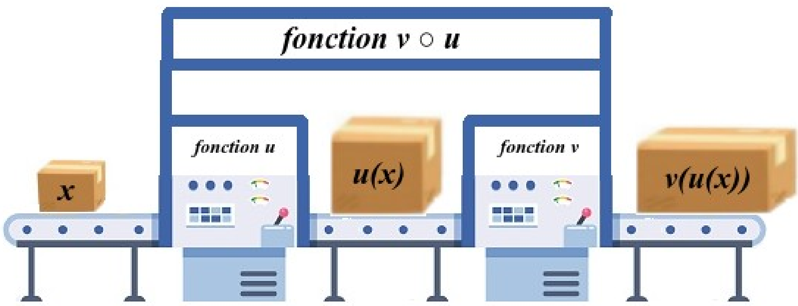
$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{I} & u & \mathrm{J} & v & \mathrm{K} \\ x & \longmapsto & u\,(x) & \longmapsto & v \circ u\,(x) \end{array}$$

Remarque :

Si on se représente une fonction comme étant une « machine à transformer des nombres » :



on peut voir la composition de deux fonctions comme étant le montage en série de deux « machines à transformer des nombres » :



Remarque :

- Dans $v \circ u$, la première fonction qui agit est u.
- $v \circ u\,(x)$ n'est définie que si x appartient au domaine de définition de u et $u\,(x)$ appartient à celui de v.
- En générale, $v \circ u \neq u \circ v$.
- On peut également composer plus de deux fonctions : $w \circ v \circ u\,(x) = w\,(v\,(u\,(x)))$: c'est d'abord la fonction u qui agit, puis v, puis w.

2°) Exemples :

Exemples :

- Si $u\,(x) = x^2$ et $v\,(x) = 5x - 4$, alors :

Avec $f\,(x) = v \circ u\,(x)$ et $g\,(x) = u \circ v\,(x)$, on a $f\,(x) = v\,(x^2) = 5x^2 - 4$ et $g\,(x) = u\,(5x - 4) = (5x - 4)^2$.

f et g sont définies sur $\mathbb{R}$.

● Si $u(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = 5x - 4$, alors :

Avec $f(x) = v \circ u(x)$ et $g(x) = u \circ v(x)$, on a $f(x) = \dfrac{5}{x} - 4$ et $g(x) = \dfrac{1}{5x-4}$.

f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et g est définie sur $\mathbb{R}-\{0{,}8\}$.

● Si $u(x) = \dfrac{1}{x}$, $v(x) = \sqrt{x}$ et $w(x) = 2x - 5$, alors $f(x) = u \circ v \circ w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-5}}$.

f est définie là où $2x - 5 > 0$, c'est-à-dire $x > 2{,}5$, soit sur $]2{,}5\ ;+\infty[$.

● soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x+4}$.

Le schéma de composition de f est

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{u} & \mathbb{R} & \xrightarrow{v} & \mathbb{R}^{+*} \\ x & \longmapsto & 2x+4 & \longmapsto & e^{2x+4} \end{array}$$

où $u(x) = 2x + 4$ et $v(x) = e^x$.

Exemples :

Voir méthodes 1 et 2 p 141, puis, pour s'entraîner : [lien 1](#) ou [lien 2](#) ou

II. Dérivée de la composée de deux fonctions dérivables :

1°) Rappels :

Rappels sur la dérivation : p.471

2°) Formule générale :

Propriété :

Si $u : I \to J$ et $v : J \to K$ (I, J, K étant des intervalles réels) sont deux fonctions dérivables (respectivement sur I et J, alors $v \circ u$ est dérivable sur I et sa dérivée est donnée par :

$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times (v' \circ u)(x)$, soit $(v(u(x))' = u'(x) \times (v'(u(x))$.

Remarque :

Vu en première : cas particulier de la dérivée de $f(ax + b)$. On a bien dans ce cas une fonction composée $f \circ u(x)$ avec $u(x) = ax + b$. Ici $u'(x) = a$.

On a alors $(f \circ u)'(x) = u'(x) \times (f' \circ u)(x) = a \times f'(ax + b)$.

3°) Exemples :

Exemple 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{4x^2-1}$.

Elle est de la forme $v \circ u(x)$ avec $u(x) = 4x^2 - 1$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

donc $u'(x) = 8x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Donc $f'(x) = u'(x) \times (v' \circ u)(x) = 8x \times \dfrac{1}{2\sqrt{4x^2-1}} = \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2-1}}$.

Exemple 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $e^{\cos(x)}$.

Elle est de la forme $v \circ u\,(x)$ avec $u\,(x) = \cos\,(x)$ et $v\,(x) = e^x$.

donc $u'\,(x) = -\sin\,(x)$ et $v'\,(x) = e^x$.

Donc $f'\,(x) = u'\,(x)\times(v' \circ u)\,(x) = -\sin\,(x)\times e^{\cos(x)}$.

Exemple 3 :

Voir méthode 3 p 143, puis pour s'entraîner : lien 1 ou lien 2 ou

Vous pouvez aussi regarder la méthode 4, mais sans les limites

4°) Formules usuelles :

Fonction	Fonction dérivée	Exemple
u^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$nu'u^{n-1}$	Si $f(x) = (3x^2+2)^3$ alors $f'(x) = 3\times(6x)\times(3x^2+2)^2$ $= 18x(3x^2+2)^2$
$\frac{1}{u^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ (u ne s'annule pas sur I)	$-\frac{nu'}{u^{n+1}}$	Si $f(x) = \frac{1}{(x^4+1)^2}$ alors $f'(x) = -\frac{4x^3}{(x^4+1)^3}$
$\sqrt{u}$ ($u>0$ sur I)	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	Si $f(x) = \sqrt{x^2+x+3}$ alors $f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+3}}$
e^u	$u'e^u$	Si $f(x) = e^{x^2-3x+1}$ alors $f'(x) = (2x-3)\,e^{x^2-3x+1}$