LE RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Un peu d'histoire :

Véritable porte d'entrée sur l'infini, le raisonnement par récurrence a été formalisé comme principe fondamental de raisonnement par Pascal, et surtout par Peano et ses collaborateurs et avait été anticipé comme mode de démonstration par les mathématiciens anciens (nombres latéraux et diagonaux), médiévaux (al-Karaji, As-Samaw'al, Fibonacci) et renaissants (Maurolico).

I. Raisonnement par récurrence :

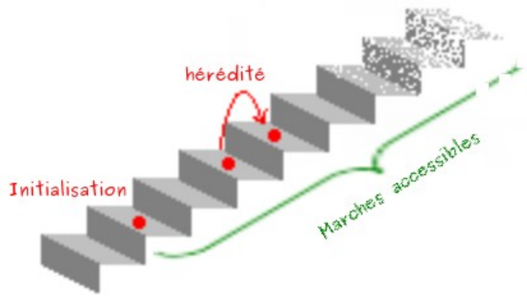
1°) Le principe :

L'idée du raisonnement par récurrence est simple et peut être imaginé ainsi :

Si l'on peut d'abord se placer sur une marche d'un escalier (**Initialisation**)

et si l'on peut passer d'une marche quelconque à sa suivante (**Hérédité**)

alors on peut se positionner sur n'importe quelle marche au moins aussi haute que celle sur laquelle on s'est placé (**Conclusion**)



2°) Le schéma :

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$ on procède en deux étapes plus la conclusion :

• Première étape : **Initialisation**. On vérifie que la proposition est vraie au premier rang n_0

C'est à dire : $P(n_0)$ est vraie.

• Deuxième étape : **Hérédité**. On suppose qu'il existe un entier $k \geqslant n_0$ quelconque tel que la proposition $P(k)$ soit vraie, et sous cette hypothèse, on démontre que la proposition $P(k+1)$ est vraie (au rang suivant).

C'est à dire : $\mathrm{P}(k) \Rightarrow \mathrm{P}(k+1)$

Conclusion : on conclut que, avec le principe de récurrence, la proposition $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$.

Remarque :

La précision de la rédaction est très importante en mathématiques, c'est particulièrement le cas lorsqu'on fait une démonstration par récurrence.

II. Exemples de démonstrations par récurrence :

1°) Démonstration d'une propriété sur une suite :

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1}=\sqrt{u_n+6}$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 3$.

Notons la propriété $P(n)$: $u_n \leqslant 3$

Initialisation :

Pour $n = 0$, on a bien $u_0 \leqslant 3$ puisque $u_0 = 0$.

Hérédité : (passage de k à $k+1$)

Supposons la propriété vraie pour un entier k, c'est-à-dire que $u_k \leqslant 3$ (c'est l'hypothèse de récurrence) et montrons qu'elle est alors encore vraie pour $k+1$, c'est-à-dire que $u_{k+1} \leqslant 3$.

On a $u_k \leqslant 3$. On en déduit que $u_k + 6 \leqslant 9$. Comme la fonction racine carrée est croissante, on en déduit alors que $\sqrt{u_k+6} \leqslant 3$, donc que $u_{k+1} \leqslant 3$.

Conclusion :

Pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 3$.

Exemple :

Voir méthode 1 p 30, puis pour s'entraîner : lien ou

2°) Inégalité de Bernoulli :

Exemple (qui est une démonstration exemplaire) :

Soit a un réel strictement positif.

Montrons par récurrence que la propriété $P(n) : (1 + a)^n \geqslant 1 + na$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation :

Pour $n = 0$, $(1 + a)^n = 1$ et $1 + na = 1$. On a bien $1 \geqslant 1$,

donc $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$ pour $n = 0$, $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Supposons qu'il existe un rang k pour lequel $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$(1 + a)^k \geqslant 1 + ka.$$

$$\text{Alors } (1 + a)^k (1 + a) \geqslant (1 + ka)(1 + a) \quad (\text{car } 1 + a > 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 + a)^{k+1} \geqslant 1 + ka + a + ka^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 + a)^{k+1} \geqslant 1 + (k+1)a + ka^2 \geqslant 1 + (k+1)a \ (\text{car } ka^2 > 0)$$

On a bien démontré que $P(k + 1)$ est vraie.

Conclusion :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$.

Petite variante : voir les premières 4 min 25 sec de la vidéo ci-contre : Lien ou

Remarque :

Regarder aussi la méthode 2 page 17 de votre livre.