Nom : **DEVOIR DE MATHÉMATIQUES** **Spé math TG 2**
Prénom : **Sujet A** **sur 16**
1 heure
Les réponses de l'exercice 1 sont à compléter sur la feuille de l'énoncé.

Exercice 1 : *6 points*
Vrai/faux. Aucune justification. Bonne réponse : 1,5 point, réponse mauvaise ou absente : 0 point.

1. On admet que pour tout réel $x \geqslant 1$, $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$.

On peut en déduire que $0 \leqslant \int_1^2 e^{-x^2}\,dx \leqslant \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}$. **Vrai :** ☒ **Faux :** ☐

$0 \leqslant e^{-x^2} \leqslant e^{-x} \Rightarrow \int_1^2 0\,dx \leqslant \int_1^2 e^{-x^2}\,dx \leqslant \int_1^2 e^{-x}\,dx$

$\int_1^2 e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_1^2 = -e^{-2} + e^{-1} = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}$ et $\int_1^2 0\,dx = 0$, c'est donc vrai.

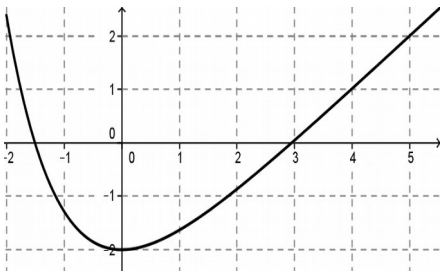
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

La valeur moyenne sur $[0\ ;\ 2]$ est égale à $\frac{1}{2} \times \ln\left(\frac{1+e^2}{2}\right)$. **Vrai :** ☒ **Faux :** ☐

Soit μ la valeur moyenne cherchée.

$\mu = \frac{1}{2-0}\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \frac{1}{2}[\ln(1+e^x)]_0^2 = \frac{1}{2}(\ln(1+e^2) - \ln(2)) = \frac{1}{2} \times \ln\left(\frac{1+e^2}{2}\right)$.

3. La courbe ci-contre représente une fonction g.



$\int_{-1}^5 g(x)\,dx$ est comprise entre 6 et 9. **Vrai :** ☐ **Faux :** ☒

La partie sous l'axe des abscisses est plus importante que la partie au-dessus, l'intégrale est donc négative, donc faux.

4. Si $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$, alors $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a\ ;\ b]$. **Vrai :** ☐ **Faux :** ☒

Faux, ça signifie juste que l'aire au-dessus de l'axe des abscisses est plus grande que celle en-dessous.

Exercice 2 *10 points*

1. Calculer, en justifiant, les intégrales suivantes :

a) $\int_1^3 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20.$ **1 pts**

b) $\int_1^2 2xe^{x^2}\,dx$

F primitive de f où $f(x) = 2x\,e^{x^2} = u'(x)e^{u(x)}$ avec $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$.

Donc $F(x) = e^{u(x)} = e^{x^2}$

Donc $\int_1^2 2x e^{x^2}\,dx = \left[e^{x^2}\right]_1^2 = e^4 - e$. **1,5 pts**

c) $\int_1^e \frac{x}{1+x^2}\,dx$

F primitive de f où $f(x) = \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = 1 + x^2$ et $u'(x) = 2x$.

Donc $F(x) = \ln(|u(x)|) = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$ car $1 + x^2 > 0$ **1,5 pts**

Donc $\int_1^e \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_1^e = \frac{1}{2}(\ln(1 + e^2) - \ln 2)$.

d) $\int_1^2 (2x+3)e^x\,dx = \int_1^2 u(x)v'(x)\,dx$ avec $u(x) = 2x + 3$ et $v'(x) = e^x$, donc $u'(x) = 2$ et $v(x) = e^x$.

Donc $\int_1^2 (2x+3)e^x\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_1^2 - \int_1^2 u'(x)v(x)\,dx = \left[(2x+3)e^x\right]_1^2 - \int_1^2 2e^x\,dx$ **2 pts**

$= 7e^2 - 5e - \left[2e^x\right]_1^2 = 7e^2 - 5e - 2e^2 + 2e = 5e^2 - 3e$.

2. Donner, à l'aide de votre calculatrice, l'arrondi au centième de $\int_0^{60} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx \approx 0{,}5$. **1 pts**

3. Soient f une fonction paire telle que $\int_{-2}^2 f(x)\,dx = 6$ et $\int_1^2 f(x)\,dx = 1$ et g une fonction telle que $\int_0^1 g(x)\,dx = -1$.

a) Calculer $\int_0^2 f(x)\,dx$ et en déduire $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Comme f est paire, $\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^2 f(x)\,dx = 3$.

D'après la relation de Chasles, $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx$, **2 pts**

d'où $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx - \int_1^2 f(x)\,dx = 3 - 1 = 2$.

b) Calculer $\int_0^1 3f(x) - 2g(x)\,dx$.

$\int_0^1 3f(x) - 2g(x)\,dx = 3\int_0^1 f(x)\,dx - 2\int_0^1 g(x)\,dx = 3\times 2 - 2\times(-1) = 8$. **1 pts**

Nom : **DEVOIR DE MATHÉMATIQUES** **Spé math 1G 3**
Prénom : **Sujet B**
1 heure
Les réponses de l'exercice 1 sont à compléter sur la feuille de l'énoncé.

Exercice 1 : *6 points*
Vrai/faux. Aucune justification. Bonne réponse : 1,5 point, réponse mauvaise ou absente : 0 point.

1. On admet que pour tout réel $x \geqslant 1$, $\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

On peut en déduire que $0 \leqslant \int_1^2 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{\mathrm{e}^2}$. **Vrai :** ☒ **Faux :** ☐

$0 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x} \Rightarrow \int_1^2 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

$\int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = [-\mathrm{e}^{-x}]_1^2 = -\mathrm{e}^{-2} + \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{\mathrm{e}^2}$ et $\int_1^2 0\,\mathrm{d}x = 0$, c'est donc vrai.

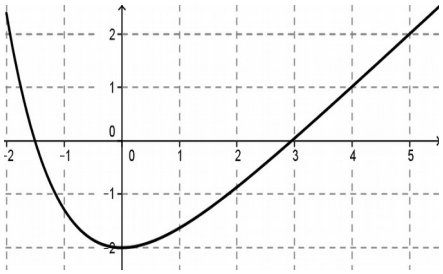
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$

La valeur moyenne sur $[0\ ;\ 2]$ est égale à $\frac{1}{2} \times \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^2}{2}\right)$. **Vrai :** ☒ **Faux :** ☐

Soit μ la valeur moyenne cherchée.

$\mu = \frac{1}{2-0}\int_0^2 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[\ln(1+\mathrm{e}^x)]_0^2 = \frac{1}{2}(\ln(1+\mathrm{e}^2) - \ln(2)) = \frac{1}{2} \times \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^2}{2}\right)$.

3. La courbe ci-contre représente une fonction g.



$\int_{-1}^5 g(x)\,\mathrm{d}x$ est comprise entre 6 et 9. **Vrai :** ☐ **Faux :** ☒

La partie sous l'axe des abscisses est plus importante que la partie au-dessus, l'intégrale est donc négative, donc faux.

4. Si $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$, alors $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a\ ;\ b]$. **Vrai :** ☐ **Faux :** ☒

Faux, ça signifie juste que l'aire au-dessus de l'axe des abscisses est plus grande que celle en-dessous.

Exercice 2 *4 points*

1. Calculer, en justifiant, les intégrales suivantes :

a) $\int_1^3 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = [\ln x]_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$

b) $\int_1^2 \frac{4x^3}{x^4+1}\mathrm{d}x$.

F primitive de f où $f(x) = \frac{4x^3}{x^4+1} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = x^4 + 1$ et $u'(x) = 4x^3$.

Donc $F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(x^4 + 1)$ car $x^4 + 1 > 0$

Donc $\int_1^2 \frac{4x^3}{x^4+1}\,dx = [\ln(x^4+1)]_1^2 = \ln 17 - \ln 2$.

c) $\int_2^3 \frac{1}{(2x-3)^2}\,dx$

F primitive de f où $f(x) = \frac{1}{(2x-3)^2} = (2x-3)^{-2}$. $f = \frac{1}{2}u'u^n$ avec $u(x) = 2x - 3$ et $n = -2$, donc $u'(x) = 2$.

Donc $F = \frac{1}{2}\frac{u^{n+1}}{n+1}$, soit $F(x) = \frac{1}{2}\frac{(2x-3)^{-1}}{-1} = \frac{-1}{2(2x-3)} = \frac{-1}{4x-6}$.

Donc $\int_2^3 \frac{1}{(2x-3)^2}\,dx = \left[\frac{-1}{4x-6}\right]_2^3 = -\frac{1}{6}+\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

d) $\int_1^3 (3x+2)e^x\,dx = \int_1^3 u(x)v'(x)\,dx$ avec $u(x) = 3x + 2$ et $v'(x) = e^x$, donc $u'(x) = 3$ et $v(x) = e^x$.

Donc $\int_1^3 (3x+2)e^x\,dx = [u(x)v(x)]_1^3 - \int_1^3 u'(x)v(x)\,dx = [(3x+2)e^x]_1^3 - \int_1^3 3e^x\,dx$

$= 11e^3 - 5e - [3e^x]_1^3 = 11e^3 - 5e - 3e^3 + 3e = 8e^3 - 2e$.

2. Donner, à l'aide de votre calculatrice, l'arrondi au centième de $\int_0^{40} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx \approx 0{,}5$.

3. Soient f une fonction paire telle que $\int_{-3}^3 f(x)\,dx = 8$ et $\int_0^1 f(x)\,dx = 3$ et g une fonction telle que $\int_1^3 g(x)\,dx = -2$.

a. Calculer $\int_0^3 f(x)\,dx$ et en déduire $\int_1^3 f(x)\,dx$.

Comme f est paire, $\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-3}^3 f(x)\,dx = 4$.

D'après la relation de Chasles, $\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^3 f(x)\,dx$,

d'où $\int_1^3 f(x)\,dx = \int_0^3 f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx = 4 - 3 = 1$.

b) Calculer $\int_1^3 2f(x) - 5g(x)\,dx$.

$\int_1^3 2f(x) - 5g(x)\,dx = 2\int_1^3 f(x)\,dx - 5\int_1^3 g(x)\,dx = 2\times 1 - 5\times(-2) = 12$.