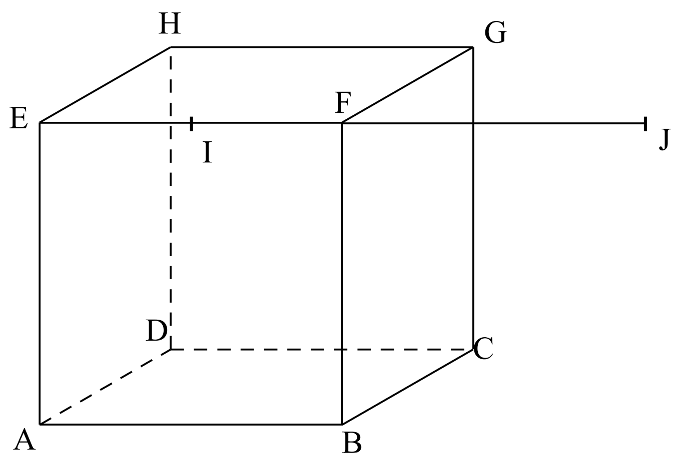
Nom : **EPREUVE DE 2h** TSpéMaths
Prénom :

Exercice 1

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1, le milieu I de $[EF]$ et J le symétrique de E par rapport à F.



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1. a. Par lecture graphique, donner les coordonnées de I et de J.

I (0,5 ; 0 ; 1) et J (2 ; 0 ; 1)

b. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$.

D (0 ; 1 ; 0), B (1 ; 0 ; 0) et G (1 ; 1 ; 1) donc $\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-0{,}5\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

c. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

$\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont deux vecteurs non colinéaires (coordonnées non proportionnelles) de (BGI).

$\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BI} = -1 + 0 + 1 = 0$ et $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BG} = 0 - 1 + 1 = 0$, donc $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

d. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BGI) est $2x - y + z - 2 = 0$.

B (1 ; 0 ; 0) : $2\times1 - 0 + 0 - 2 = 0$.

G (1 ; 1 ; 1) : $2\times1 - 1 + 1 - 2 = 0$.

I (0,5 ; 0 ; 1) : $2\times0{,}5 - 0 + 1 - 2 = 0$.

Donc $2x - y + z - 2 = 0$ est bien une équation cartésienne du plan (BGI)

2. On note $\mathscr{D}$ la droite passant par F et orthogonale à (BGI).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.

$\mathscr{D}$ passe par F (1 ; 0 ; 1) et à pour vecteur directeur $\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, donc $\mathscr{D}$: $\begin{cases}x=2t+1\\y=-t\\z=t+1\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

b. On considère le point L de coordonnées $L\left(\frac{2}{3};\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)$.

Montrer que L est le point d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan (BGI).

$2(2t + 1) + t + t + 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow 6t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{6}$, d'où $L\left(\frac{2}{3};\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)$.

3. On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'une pyramide est donné par la formule $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

a. Calculer le volume de la pyramide FBGI.

$\mathcal{B} = \mathcal{A}_{BFG} = 0{,}5$ et $h = FI = 0{,}5$ donne $\mathcal{V}_{FBGI} = \frac{1}{12}$.

b. Calculer la longueur FL et en déduire l'aire du triangle BGI.

$F(1 ; 0 ; 1)$ et $L\left(\frac{2}{3};\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)$ donc $\overrightarrow{FL}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$, d'où $FL = \sqrt{\left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{6} = d(F,(BGI))$

$\mathcal{V}_{FBGI} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{BGI} \times FL = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{BGI} \times \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \mathcal{A}_{BGI} = \frac{6}{4\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Exercice 2

La vitesse v de variation de cap d'un bateau au cours du temps (exprimée en degrés par heure) est modélisée par la dérivée d'une fonction f de la variable t ($t \geqslant 0$, t en heures), solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' = m(20 - y) \text{ où } m \text{ est un réel.}$$

1. Résoudre en fonction de m l'équation (E).

$(E) : y' = m(20 - y) \Leftrightarrow y' = -my + 20m$. d'où $f(t) = Ce^{-mt} + 20$.

2. On suppose que $f(0) = 0$. Trouver l'expression de f et de v en fonction de m.

$f(t) = -20e^{-mt} + 20$ et $v(t) = 20me^{-mt}$.

3. On suppose que f est donnée par $f(t) = 20 - 20e^{-0{,}035t}$.

a. Déterminer $v(t)$ et $v'(t)$.

$v(t) = 0{,}7e^{-0{,}035t}$ et $v'(t) = -0{,}0245e^{-0{,}035t}$.

b. Calculer les limites de v aux bornes de son domaine de définition et dresser le tableau de variations de v sur $[0 ; +\infty[$.

$v'(t) = -0{,}0245e^{-0{,}035t}$ donc $v'(t) < 0$ sur $\mathbb{R}^*$

$\lim\limits_{t \to 0} v(t) = 0{,}7$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 0$ donc

t	0	$+\infty$
$v'(t)$	−	
$v(t)$	0,7 ↘	0

c. Quelle information peut-on en déduire pour f ?

v (t) est décroissante, donc sa primitive, f est concave.

d. Résoudre v (t) = 0,5. Interpréter le résultat obtenu.

$v(t) = 0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}7\mathrm{e}^{-0{,}035t} = 0{,}5 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}035t} = \dfrac{5}{7} \Leftrightarrow -0{,}035t = \ln 5 - \ln 7 \Leftrightarrow t = (\ln 7 - \ln 5) \div 0{,}035 \approx 9{,}6.$

À l'instant $t \approx$ 9h36, le cap du bateau varie de 0,5°/h.

Barème :

Exercice 1 : 11,5 points

1. a. 0,5

b. 1

c. 2

d. 2

2. a. 1

b. 2

3. a. 1

b. 2

Exercice 2 : 8,5 points

1. 1

2. 1,5 (f puis v)

3. a. 1,5

b. 2

c. 1

d. 1,5 (1 résolution + 0,5 interprétation)