BAC BLANC Avril 2021
CORRECTION

Exercice 1

1. (a) $\mathrm{A}(2;0;0)$, $\mathrm{B}(0;3;0)$ et $\mathrm{C}(0;0;1)$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ n'étant pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles), ce sont deux vecteurs directeurs du plan (ABC).

Par ailleurs $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$, donc $\vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{AB}}=3\times(-2)+2\times3+6\times0=0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{AC}}=3\times(-2)+2\times0+6\times1=0$.

Ainsi $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC) : c'est un vecteur normal à ce plan.

(b) Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc donnée par $3x+2y+6z+d=0$ avec $\mathrm{A}(2;0;0)$ dans (ABC), donc $3\times2+2\times0+6\times0+d=0$, soit $d=-6$.
On obtient donc une équation de (ABC) : $3x+2y+6z-6=0$.

2. (a) *d* est orthogonale au plan (ABC), elle admet donc $\vec{n}$ comme vecteur directeur, elle passe également par $\mathrm{O}(0;0;0)$ donc elle admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases}x=3t\\y=2t\\z=6t\end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$.

(b) __Méthode 1 :__
Soit $\mathrm{H}(x;y;z)$ le point d'intersection de d et du plan (ABC). Les coordonnées $(x;y;z)$ de H vérifient le système (S): $\begin{cases}x=3t\\y=2t\\z=6t\\3x+2y+6z-6=0\end{cases}$.

On résout (S) : (S) $\Leftrightarrow \begin{cases}x=3t\\y=2t\\z=6t\\3\times3t+2\times2t+6\times6t-6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3t\\y=2t\\z=6t\\49t=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3t\\y=2t\\z=6t\\t=\dfrac{6}{49}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{18}{49}\\y=\dfrac{12}{49}\\z=\dfrac{36}{49}\\t=\dfrac{6}{49}\end{cases}$.

Ainsi $\mathrm{H}\left(\dfrac{18}{49};\dfrac{12}{49};\dfrac{36}{49}\right)$,

__Méthode 2 :__
__Vérifions__ que le point $\mathrm{H}\left(\dfrac{18}{49};\dfrac{12}{49};\dfrac{36}{49}\right)$ appartient à (ABC) :

$$3\times\frac{18}{49}+2\times\frac{12}{49}+6\times\frac{36}{49}-6=\frac{54}{49}+\frac{24}{49}+\frac{216}{49}-\frac{294}{49}=0$$

__Vérifions__ que le point $\mathrm{H}\left(\dfrac{18}{49};\dfrac{12}{49};\dfrac{36}{49}\right)$ appartient à *d* : En prenant $t=\dfrac{6}{49}$ dans la représentation paramétrique de *d*, on retrouve les coordonnées de H.
Donc le point H est bien l'intersection de (ABC) et *d*.

Enfin, quelle que soit la méthode, $\mathrm{OH}=\sqrt{\left(\dfrac{18}{49}\right)^2+\left(\dfrac{12}{49}\right)^2+\left(\dfrac{36}{49}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1764}{2401}}=\sqrt{\dfrac{36}{49}}=\dfrac{6}{7}$.

3. On peut considérer que la pyramide OABC a :

- pour base le triangle rectangle OAB, d'aire $\dfrac{\text{OA}\times\text{OB}}{2}=\dfrac{3\times2}{2}=3$ et pour hauteur associée OC = 1.

  Son volume $\mathcal{V}$ vaut donc $\dfrac{1}{3}\times3\times1=1$.

- pour base le triangle ABC, d'aire $\mathcal{A}$, et pour hauteur associée $\text{OH}=\dfrac{6}{7}$.

  Son volume $\mathcal{V}$ vaut donc $\dfrac{1}{3}\times\mathcal{A}\times\dfrac{6}{7}$.

On a donc $1=\dfrac{1}{3}\times\mathcal{A}\times\dfrac{6}{7}$, soit $\mathcal{A}=\dfrac{7}{2}=3{,}5$.

Exercice 2

$f(x)=x+4-4\ln(x)-\dfrac{3}{x}$ $\quad x\in\,]0\,;+\infty[$

1. Limite en $+\infty$:

$f(x)=x\left(1+\dfrac{4}{x}-4\dfrac{\ln(x)}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)$ avec :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{4}{x}=1+0=1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ par croissance comparée, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}-4\dfrac{\ln(x)}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{3}{x^2}=0$

donc par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}-4\dfrac{\ln(x)}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)=1$.

Par ailleurs $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1+\dfrac{4}{x}-4\dfrac{\ln(x)}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)=+\infty$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

2. $f(x)=x+4-4\ln(x)-\dfrac{3}{x}$ donc $f'(x)=1-4\times\dfrac{1}{x}-3\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2}$.

3.(a) Le signe de $f'(x)$ est donné par celui de x^2-4x+3 car $x^2>0$.

$\Delta=(-4)^2-4\times1\times3=4$: x^2-4x+3 admet deux racines réelles distinctes $x_1=\dfrac{4-\sqrt{4}}{2}=1$ et $x_2=\dfrac{4+\sqrt{4}}{2}=3$, et est positif « à l'extérieur » des racines .

x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	2	↘	$f(3)$	↗	$+\infty$

$f(1)=1+4-4\ln(1)-3=2$ $\qquad\qquad$ $f(3)=3+4-4\ln(3)-\dfrac{3}{3}=6-4\ln(3)\approx1{,}6$

(b) Par lecture du tableau de variation complété, l'équation $f(x)=\dfrac{5}{3}$ admet 3 solutions dans $]0\,;+\infty[$: l'une dans $]0\,;1]$, une autre dans $[1\,;3]$ et enfin la dernière dans $[3\,;+\infty[$.

4. Pour étudier la convexité de *f* on va étudier la signe de $f''(x)$ sur]0 ; +∞[, f' étant dérivable sur cet intervalle.

$f'(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2}$: $f'=\frac{u}{v}$ donc $f''=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

On obtient :

$$f''(x)=\frac{(2x-4)x^2-(x^2-4x+3)\times 2x}{(x^2)^2}=\frac{2x((x-2)x-(x^2-4x+3))}{x^4}=\frac{2x(x^2-2x-x^2+4x-3)}{x^4}=\frac{2x(2x-3)}{x^4}$$

$2x>0$ et $x^4>0$ donc le signe de $f''(x)$ est donné par celui de $2x-3$:

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$	||	$-$	0	$+$	

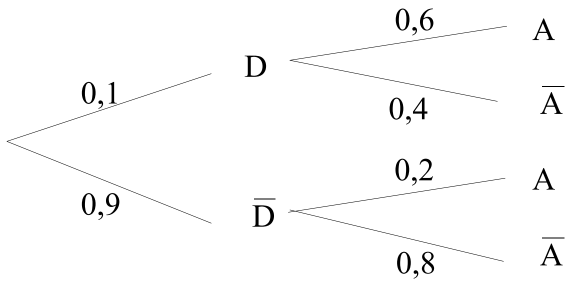
Sur $\left]0;\frac{3}{2}\right]$ *f* est donc concave, sur $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ *f* est convexe. *f* change de convexité en $x=\frac{3}{2}$: $\mathscr{C}$ admet donc un unique point d'inflexion au point d'abscisse $\frac{3}{2}$, son ordonnée est

$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}+4-4\ln\left(\frac{3}{2}\right)-3\times\frac{2}{3}=3{,}5-4\ln(1{,}5)$.

Exercice 3

Partie 1

1.



2. On souhaite calculer P (D ∩ A) : P (D ∩ A) = $P(D)\times P_D(A)=0{,}1\times 0{,}6=0{,}06$.

3. P (A) = P (A ∩ D) + P (A ∩ $\overline{D}$) = $0{,}06+0{,}9\times 0{,}2=0{,}24$.

4. On souhaite calculer $P_A(\overline{D})$: $P_A(\overline{D})=\frac{P(A\cap\overline{D})}{P(A)}=\frac{0{,}9\times 0{,}2}{0{,}24}=0{,}75$.

La probabilité qu'un candidat admis à l'école n'ait pas été sélectionné sur dossier est 0,75.

Partie 2

1. (a) *X* suit une loi binomiale de paramètres $n=7$ et $p=0{,}24$ car *X* compte le nombre de succès dans le cadre d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n=7$ et $p=0{,}24$ (on répète 7 fois la même épreuve de Bernoulli de façon indépendante, d'événement succès A : « le candidat est admis » de probabilité p = 0,24).

(b) On veut P (X = 1) : P (X = 1) = $7\times 0{,}24\times(1-0{,}24)^6=7\times 0{,}24\times 0{,}76^6\approx 0{,}32$

(ou P (X = 1) = $\binom{7}{1}\times 0{,}24\times(1-0{,}24)^{7-1}$)

La probabilité qu'un seul des sept candidats soit admis à l'école est 0,32 au centième près.

(c) On veut P ($X \geqslant 2$) : P ($X \geqslant 2$) = 1 – P ($X \leqslant 1$) = 1 – P (X = 0) – P (X = 1) =

$1-0{,}76^7-7\times 0{,}24\times 0{,}76^6\approx 0{,}53$

(ou directement avec 1 – BinomFRep(7,0.24,1))

La probabilité qu'au moins deux des sept candidats soient admis à l'école vaut 0,53 au centième près.

2. (a) Soit Y le nombre de candidats de ce lycée qui sont admis à l'école.
Y suit une loi binomiale de paramètres n et $p=0{,}24$. La probabilité d'échec est donc $1-p=0{,}76$.
$\mathrm{P}(Y=0)=0{,}76^n$: c'est la probabilité qu'aucun des candidats de ce lycée ne soit admis à l'école.

(b) On cherche à résoudre $\mathrm{P}(Y \geqslant 1) \geqslant 0{,}99$ avec $\mathrm{P}(Y \geqslant 1) = 1 - \mathrm{P}(Y = 0)$:
$1-0{,}76^n \geqslant 0{,}99 \Leftrightarrow 1-0{,}99 \geqslant 0{,}76^n \Leftrightarrow \ln(0{,}01) \geqslant \ln(0{,}76^n)$ car ln est croissante sur $]0;+\infty[$, soit
$\ln(0{,}01) \geqslant n\ln(0{,}76)$, soit $n\ln(0{,}76) \leqslant \ln(0{,}01)$, soit $n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}76)}$ (car $\ln(0{,}76)<0$), avec
$16<\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}76)}<17$.
C'est donc à partir de 17 candidats présentés par le lycée qu'au moins l'un d'entre eux sera admis à l'école avec une probabilité supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 4

1.(a) $f(0)=225$ car les baguettes sortent du four qui est à une température de 225°C.
(b) Soit (E) : $y'+6y=150$.

- L'équation homogène associée (H) : $y'+6y=0$, s'écrit $y'=-6y$, elle admet donc pour solution générale $y(t)=\mathrm{K}\,\mathrm{e}^{-6t}$ où $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$.
- On cherche une solution particulière g constante de (E) : $g(t)=c$ donc $g'(t)=0$,
 $g'+6g=150 \Leftrightarrow 0+6c=150 \Leftrightarrow c=\dfrac{150}{6}=25$. Ainsi $g(t)=25$ est solution de (E).
- La solution générale de (E) s'obtient comme somme de la solution générale de (H) et d'une solution particulière de (E) : $f(t)=\mathrm{K}\,\mathrm{e}^{-6t}+25$ où $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$.

(c) On sait de plus que $f(0)=225$, donc $\mathrm{K}\,\mathrm{e}^0+25=225$, soit K = 200.
Ainsi $f(t)=200\,\mathrm{e}^{-6t}+25$ $(t \geqslant 0)$

2. ● f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $f'(t)=200\times(-6)\times\mathrm{e}^{-6t}=-1200\,\mathrm{e}^{-6t}$, $f'(t)<0$: f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
● Limite en $+\infty$: $\lim\limits_{t\to+\infty} -6t=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X=0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-6t}=0$ (par composition),
on obtient donc $\lim\limits_{t\to+\infty} 200\,\mathrm{e}^{-6t}+25=200\times0+25=25$.
● f fournit donc un modèle en accord avec le fait que la température de la baguette décroisse à la sortie du four et tende à se stabiliser à la température ambiante de 25°C.

3. D'après ce qui précède :

x	0	α	$+\infty$
$f(x)$	225	40	25

Ainsi sur $[0\,;+\infty[$ f est continue, strictement décroissante, 40 est dans l'intervalle image $]25\,;225]$: d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=40$ admet donc une unique solution α.
$\mathcal{T}_0$ est le temps d'attente minimal entre la sortie du four d'une baguette et sa mise en rayon (lorsqu'elle atteint 40°C) : $\mathcal{T}_0 = \alpha$ (en heures).

4. Sur le graphique le point d'ordonnée 40 a une abscisse proche de 0,4 : $\mathcal{T}_0 \approx 0{,}4$ h soit 24 min.

5.(a) $\mathrm{D}_0=f\left(\dfrac{0}{60}\right)-f\left(\dfrac{1}{60}\right)=225-200\,\mathrm{e}^{-\frac{6}{60}}-25=200-200\,\mathrm{e}^{-0{,}1}\approx 19$ à 0,1 près.
Ainsi une minute après sa sortie du four, la baguette a sa température qui a baissé de 19°C.

(b)

$$\mathrm{D}_n = f\left(\frac{n}{60}\right) - f\left(\frac{n+1}{60}\right) = 200\,\mathrm{e}^{-\frac{6n}{60}} + 25 - 200\,\mathrm{e}^{-\frac{6(n+1)}{60}} - 25 = 200\,\mathrm{e}^{-\frac{6n}{60}} - 200\,\mathrm{e}^{-\frac{6n}{60}-\frac{6}{60}} = 200\,\mathrm{e}^{-\frac{6n}{60}}\left(1-\mathrm{e}^{\frac{-6}{60}}\right)$$

soit $\mathrm{D}_n = 200\,\mathrm{e}^{-0,1n}\left(1-\mathrm{e}^{-0,1}\right)$.

On a donc : $\mathrm{D}_{n+1} = 200\,\mathrm{e}^{-0,1(n+1)}\left(1-\mathrm{e}^{-0,1}\right) = 200\,\mathrm{e}^{-0,1n}\,\mathrm{e}^{-0,1}\left(1-\mathrm{e}^{-0,1}\right) = \mathrm{e}^{-0,1}\,\mathrm{D}_n$.

La suite $\left(\mathrm{D}_n\right)$ est géométrique, de raison $q = \mathrm{e}^{-0,1}$ < 1 et de premier terme D_0 >0 : elle est donc décroissante et converge vers 0.

Ce résultat était prévisible car la température de la baguette va se stabiliser à 25°C, donc la diminution de la température, minute après minute, tend vers 0.