

Devoir maison de mathématiques
Équations cartésiennes, représentations paramétriques

ex 59 p 321

59 On considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations cartésiennes respectives $2x - 3y + z - 4 = 0$ et $-2x + 3y - z = 0$.

1. Déterminer leur position relative.

2. On considère la droite d de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = k \\ y = 1 - k \text{ où } k \text{ est un réel.} \\ z = 3 - k \end{cases}$$

a) Déterminer les coordonnées du point A intersection de la droite d et du plan $\mathcal{P}$.

b) Déterminer les coordonnées du point B intersection de la droite d et du plan $\mathcal{P}'$.

3. Calculer la distance AB.

4. Justifier que cette distance n'est pas la plus courte distance entre les deux plans.

1. $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}' \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs normaux respectifs des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, $\vec{n}' = -\vec{n}$, les vecteurs sont

donc colinéaires et les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont donc parallèles. Ils ne sont pas confondus car les équations des plans ne sont pas équivalentes.

2. a) La valeur de k correspondant au point A est solution de l'équation :

$$2k - 3(1 - k) + (3 - k) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4k - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = 1$$

Les coordonnées de A sont donc $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) La valeur de k correspondant au point B est solution de l'équation :

$$-2k + 3(1 - k) - (3 - k) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4k = 0$$

$$\Leftrightarrow k = 0$$

Les coordonnées de B sont donc $B \begin{pmatrix} 0 \\ 1-0 \\ 3-0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $AB = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

4. La distance est la plus courte lorsque la droite d est perpendiculaire aux plans, c'est-à-dire lorsque le

point B est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}'$. $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d , mais il n'est pas

colinéaire à $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, d n'est donc pas perpendiculaire aux plans. CQFD