Devoir maison pour le jeudi 28 janvier

Exercice 115 p 160 :

1) a) $f = uv$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^{x^2-1}$

donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x\,e^{x^2-1}$ (car u est de la forme e^w avec $w(x) = x^2 - 1$ donc $w'(x) = 2x$ donc $u' = w'e^w$).

Donc $f' = u'v + uv'$, soit $f'(x) = e^{x^2-1} + 2x^2\,e^{x^2-1} = (2x^2 + 1)\,e^{x^2-1}$

b) $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2) a) $f' = uv$ avec $u(x) = 2x^2 + 1$ et $v(x) = e^{x^2-1}$

donc $u'(x) = 4x$ et $v'(x) = 2x\,e^{x^2-1}$ (comme ci-dessus).

Donc $f'' = u'v + uv'$, soit $f''(x) = 4x\,e^{x^2-1} + 2x(2x^2 + 1)\,e^{x^2-1} = (4x^3 + 2x + 4x)\,e^{x^2-1}$
$= (4x^3 + 6x)\,e^{x^2-1} = 2x(2x^2 + 3)\,e^{x^2-1}$.

b) $(2x^2 + 3) > 0$ et $e^{x^2-1} > 0$ sur $\mathbb{R}$. f'' est donc du signe de $2x$, donc positifs sur $\mathbb{R}^+$, f est donc convexe sur $\mathbb{R}^+$.

3) a) $h(x) = x - f(x) = x - x\,e^{x^2-1} = x(1 - e^{x^2-1})$. en factorisant par x.

b) Sur $[-1 ; 1]$, $h(x)$ est donc du signe de x, donc négatif sur $[-1 ; 0]$ et positif sur $[0 ; 1]$, $\mathscr{C}_f$ est donc au-dessus de D sur $[-1 ; 0]$ et en dessous de D sur $[0 ; 1]$.