Exercice 100 p 69

100 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2-4}$ définie sur $]-\infty\,;-2[\cup]-2\,;2[\cup]2\,;+\infty[$.

1. Montrer que f possède une asymptote horizontale et préciser son équation.

2. Calculer les limites à droite et à gauche de f en 2.
La courbe de f possède-t-elle une asymptote verticale ? Si oui, préciser son équation.

3. La courbe de f possède-t-elle une autre asymptote verticale ? Justifier.

4. Dresser le tableau de variations de f.

5. En déduire une allure de la courbe de f.

$$f(x) = \frac{2x}{x^2-4}.$$

1°) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$$

et $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x^2-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0$$

L'axe des abscisses, d'équation $y = 0$, est donc une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en plus et moins l'infinie.

2°) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to2^-} 2x = 4 \\ \\ \lim\limits_{x\to2^-} x^2-4 = 0^- \end{array}\right\} \quad \lim_{x\to2^-} \frac{2x}{x^2-4} = -\infty \text{ (par quotient)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to2^+} 2x = 4 \\ \\ \lim\limits_{x\to2^+} x^2-4 = 0^+ \end{array}\right\} \quad \lim_{x\to2^+} \frac{2x}{x^2-4} = +\infty \text{ (par quotient)}$$

$\mathscr{C}_f$ possède donc une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

3°) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-2^-} 2x = -4 \\ \\ \lim\limits_{x\to-2^-} x^2-4 = 0^+ \end{array}\right\} \quad \lim_{x\to-2^-} \frac{2x}{x^2-4} = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-2^+} 2x = -4 \\ \\ \lim\limits_{x\to-2^+} x^2-4 = 0^- \end{array}\right\} \quad \lim_{x\to-2^+} \frac{2x}{x^2-4} = +\infty$$

$\mathscr{C}_f$ possède donc une asymptote verticale d'équation $x = -2$.

4°) $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = x^2 - 4$, donc $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2x$.

Donc $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ soit $f'(x) = \dfrac{2(x^2-4) - 2x \times 2x}{(x^2-4)^2} = \dfrac{2x^2 - 8 - 4x^2}{(x^2-4)^2} = \dfrac{-2x^2-8}{(x^2-4)^2}$.

Le dénominateur étant positif, f' est du signe de $-2x^2 - 8 = -2(x^2 + 4)$. $x^2 + 4 > 0$ donc $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$0 \searrow$		$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

5°) Pour déduire une allure de la courbe de f, on commence par tracer les asymptotes (en vert), puis on se sert du tableau de variations :