Nom : | **DEVOIR DE MATHÉMATIQUES** | **Spé math TG 2**

Prénom :

Sujet A

1 heure 30

<u>Exercice 1</u> *5 points*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^3 + 5x^2 + 3x - 9)^3$.

1. Montrer que $f'(x) = 3(3x^2 + 10x + 3)(x^3 + 5x^2 + 3x - 9)^2$.

$f(x) = (x^3 + 5x^2 + 3x - 9)^3$. $f = u^n$ avec $u(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ et $n = 3$.

donc $u'(x) = 3x^2 + 10x + 3$

Donc $f' = nu'u^{n-1}$ soit $f'(x) = 3(3x^2 + 10x + 3)(x^3 + 5x^2 + 3x - 9)^2$.

2. En déduire le tableau de variations de f (*sans les limites, on pourra arrondir les extremums au centième au besoin*).

<u>Étude du signe de f' :</u>

3 et $(x^3 + 5x^2 + 3x - 9)^2$ sont positifs, f' est donc du signe de $3x^2 + 10x + 3$.

$\Delta = 100 - 36 = 64$. Ce trinôme a donc deux racines : $x_1 = \dfrac{-10-\sqrt{64}}{6} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-10+\sqrt{64}}{6} = -\dfrac{1}{3}$

Un trinôme étant du signe de $-a$ entre ses racines, on obtient le tableau suivant :

avec $f(-3) = 0$ et $f\left(-\dfrac{1}{3}\right) \approx -852{,}37$.

x	$-\infty$		-3		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	0	↘	$-852{,}37$	↗	

<u>Exercice 2 :</u> Calculs rapides *3 points*

Soit n un entier naturel. Simplifier les nombres suivants (*aucune justification n'est attendue, inscrire la réponse sur le sujet*).

1. $(n + 1) \times n\,! = (n + 1)\,!$ **2.** $\dfrac{(n+2)!}{(n+2)(n+1)} = n\,!$ **3.** pour $n \geqslant 7$, $\dfrac{(n-5)!}{(n-7)!} = (n - 5)(n - 6)$

<u>Exercice 3 :</u> *6 points*

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{0{,}5\,u_n^2 + 8}$.

1. a) Grâce à la calculatrice, compléter le tableau de valeurs (*sur le sujet*), **arrondir au millième** :

n	0	1	5	10	15
u_n	0	2,828	3,937	3,998	4

b) Conjecturer le sens de variation et la limite éventuelle de la suite (u_n).

(u_n) semble croissante et converger vers 4.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

Initialisation :

$u_0 = 0$ et $u_1 \approx 2{,}828$, on a donc bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$.

Hérédité :

Supposons qu'il existe un entier k tel que $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 4$. On veut montrer que $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 4$.

$0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1}$.

$0 \leqslant u_k^2 \leqslant u_{k+1}^2 \leqslant 16$ car la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

$0 \leqslant 0{,}5u_k^2 \leqslant 0{,}5u_{k+1}^2 \leqslant 8$ (on multiplie par 0,5)

$8 \leqslant 0{,}5u_k^2 + 8 \leqslant 0{,}5u_{k+1}^2 + 8 \leqslant 16$ (on ajoute 8 à chaque membre).

$\sqrt{8} \leqslant \sqrt{0{,}5u_k^2+8} \leqslant \sqrt{0{,}5u_{k+1}^2+8} \leqslant 4$ car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

or $0 \leqslant \sqrt{8}$, donc $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 4$.

Conclusion :

Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

3. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante et majorée par 4, et est donc convergente.

4. On se propose d'obtenir l'expression de u_n en fonction de n, c'est-à-dire la forme explicite.

a) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n^2 - 16$. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5.

$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 16 = \left(\sqrt{0{,}5u_n^2+8}\right)^2 - 16 = 0{,}5u_n^2 + 8 - 16 = 0{,}5u_n^2 - 8 = 0{,}5(u_n^2 - 16) = 0{,}5v_n$.

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,5.

b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

$v_0 = u_0^2 - 16 = -16$. Donc $v_n = v_0q^n = -16\times0{,}5^n$.

c) Puis en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

$v_n = u_n^2 - 16$ donc $u_n = \sqrt{v_n+16} = \sqrt{-16\times0{,}5^n+16}$.

d) Calculer la limite de la suite (u_n).

$\lim\limits_{x\to+\infty} -16\times0{,}5^n = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n = \sqrt{16} = 4$.

Exercice 4 *6 points*

1. Un club d'échecs organise un tournoi interne entre ses 10 membres. Chaque joueur doit rencontrer tous les autres une seule fois. Combien doit-on organiser de parties ?

Il y a autant de parties d'échecs que de paires parmi les 10 membres, soit $\binom{10}{2} = \frac{10!}{8!2!} = 45$.

2. Un club sportif doit envoyer une délégation pour une rencontre à l'étranger. Cette délégation doit être composée de 3 femmes et 2 hommes. Le club possède 20 membres, 12 femmes et 8 hommes. Combien de délégations différentes sont-elles possibles ?

Le choix des femmes correspond à une combinaison de 3 éléments parmi 12 (les noms des 3 femmes, l'ordre n'ayant pas d'importance), soit $\binom{12}{3}$. Le choix des hommes correspond à une combinaison de 2 éléments parmi 8 (les noms des 2 hommes, l'ordre n'ayant pas d'importance) soit $\binom{8}{2}$. On utilise ensuite le principe multiplicatif : $\binom{12}{3}\times\binom{8}{2} = \frac{12\,!}{9\,!\,3\,!}\times\frac{8!}{6\,!\,2\,!} = 6\,160$. Il y a donc 6 160 délégations possibles.

3. a) Combien y a-t-il de nombres de quatre chiffres, le premier étant non nul.

Le premier chiffre est strictement supérieur à 0, les 3 autres sont quelconques. On a donc $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9\,000$ nombres de 4 chiffres respectant les contraintes.

b) Combien y a-t-il de nombres de quatre chiffres distincts tous strictement supérieurs à 1.

Cette situation correspond à un tirage sans remises parmi les chiffres de 2 à 9 (8 chiffres). Pas de répétition et l'ordre compte. Il y a donc $\frac{8\,!}{(8-4)\,!} = \frac{8!}{4\,!} = 8\times7\times6\times5 = 1680$.

Nom : **DEVOIR DE MATHÉMATIQUES** **Spé math 1G 3**

Prénom : **Sujet B**

1 heure

Les réponses sont à compléter sur la feuille de l'énoncé.

Appréciation :	Note :

Exercice 1 *4 points*

Exercice 2 *4 points*

Exercice 3 *8 points*