EXEMPLES DE LOIS À DENSITÉ

Jusqu'à présent en première année et en ce début de deuxième année, pour définir une loi de probabilité il suffisait d'associer à chaque issue la probabilité qui lui correspondait. Cela était possible car le nombre d'issues était fini. Dans certains cas la variable aléatoire est continue, et donc elle prend une infinité de valeurs (ex : durée de communications téléphoniques). On ne peut alors plus attribuer une probabilité à chaque issue (elle serait nulle), mais on s'intéresse à la probabilité que la variable aléatoire appartienne à un intervalle, (durée de communication entre 1 et 2 min). On dit qu'on définit une loi de probabilité continue.

Dans ce chapitre, on utilisera parfois la notation intégrale, mais sans faire réellement de calcul intégral qui est au programme de deuxième année. Il faut juste lire $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ comme étant l'aire sous la courbe de la fonction *f* entre les points d'abscisses *a* et *b*.

I. Définition d'une loi à densité :

1°) Fonction densité de probabilité :

Définition :

f est une fonction densité de probabilité sur $[a\ ;\ b]$ si elle vérifie trois conditions :

1 : *f* est continue sur $[a\ ;\ b]$;

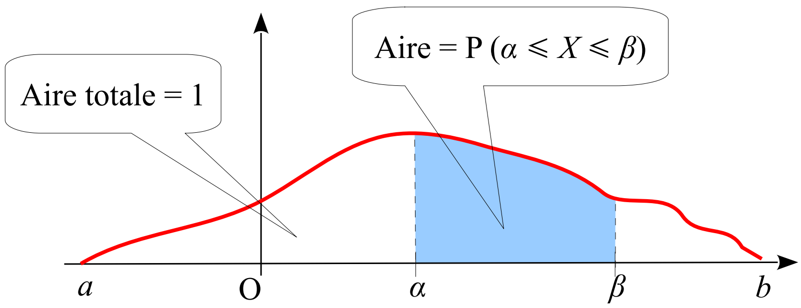
2 : pour tout $x \in [a\ ;\ b], f(x) \geqslant 0$;

3 : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

2°) Loi à densité :

Définition :

Une variable aléatoire X à valeurs dans un intervalle $\mathrm{I} = [a\ ;\ b]$ suit une loi à densité *f*, si pour tous réels α et β de I on a $\mathrm{P}(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$.



Remarque :

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P}(X = \alpha) = \int_\alpha^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x = 0$;

Par conséquent $\mathrm{P}(X \leqslant \alpha) = \mathrm{P}(X < \alpha)$ et $\mathrm{P}(X \geqslant \alpha) = \mathrm{P}(X > \alpha)$;

$\mathrm{P}(X \leqslant \alpha) = 1 - \mathrm{P}(X \geqslant \alpha)$.

3°) Fonction de répartition :

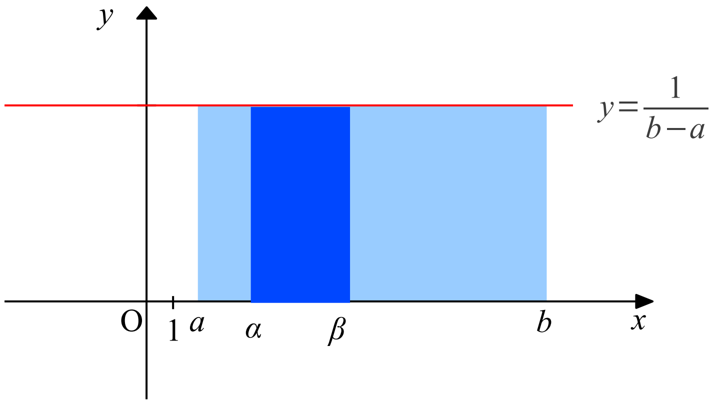
Définition :

On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

II. Loi uniforme :

1°) Loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$:



Définition :

On appelle loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$ la loi continue ayant pour densité la fonction constante f définie sur $[a\ ;\ b]$ par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$.

Remarque :

On peut vérifier que $f(x)$ est bien une fonction densité de probabilité.

En effet, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \times (b-a) = 1$.

Notation :

$\mathcal{U}(a\ ;\ b)$ signifie loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$.

Propriété :

Pour cette loi, la probabilité d'un intervalle $[\alpha\ ;\ \beta]$ inclus dans $[0\ ;\ 1]$ e st $\mathrm{P}([\alpha\ ;\ \beta]) = \dfrac{1}{b-a}(\beta-\alpha)$.

Preuve :

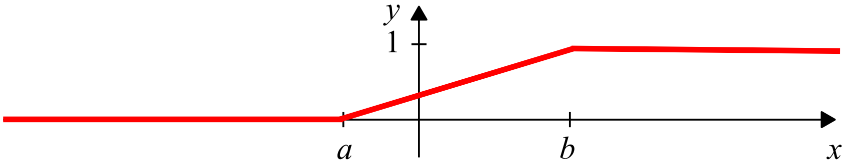
$$\mathrm{P}([\alpha\ ;\ \beta]) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{b-a}x\right]_\alpha^\beta = \frac{1}{b-a}(\beta-\alpha).$$

Exemple :

On choisit au hasard un réel de $[2\ ;\ 5]$. La probabilité d'obtenir un réel de $[3{,}3\ ;\ 4{,}5]$ est $\mathrm{P}([3{,}1\ ;\ 4{,}5]) = \dfrac{1}{5-2}\times(4{,}5-3{,}3)=\dfrac{1}{3}\times 1{,}2=0{,}4$.

2°) Fonction de répartition :

La fonction de répartition de la loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$ est $\mathrm{F}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x\in[a\,;b] \\ 1 & \text{si } x>b \end{cases}$.



3°) Espérance et variance :

Propriété :

Si X suit une loi uniforme $\mathcal{U}(a\ ;\ b)$, alors $\mathrm{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $\mathrm{V}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Exemple :

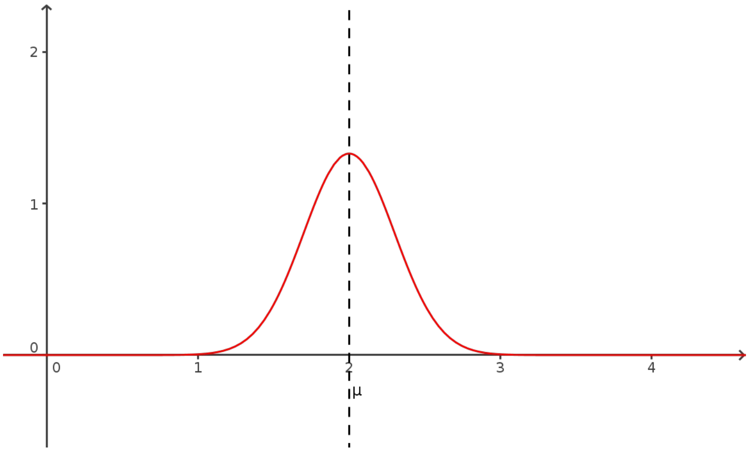
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[2\ ;\ 5]$ ($\mathcal{U}(2\ ;\ 5)$).

Alors E (X) = $\dfrac{2+5}{2}$ = 3,5 V (X) = $\dfrac{(5-2)^2}{12}$ = $\dfrac{3}{4}$ et σ (X) = $\sqrt{\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

III. Loi normale :

1°) Définition :

Tout comme les lois uniforme et exponentielle, la loi normale est une loi à densité. La courbe représentative de la fonction densité de la loi normale est en forme de cloche.



Lorsqu'une variable aléatoire suit une loi normale de paramètres μ et σ, beaucoup de valeurs prises par la V.A. se situent autour de la moyenne, de moins en moins au fur à mesure qu'on s'en éloigne, et ceci de façon symétrique.

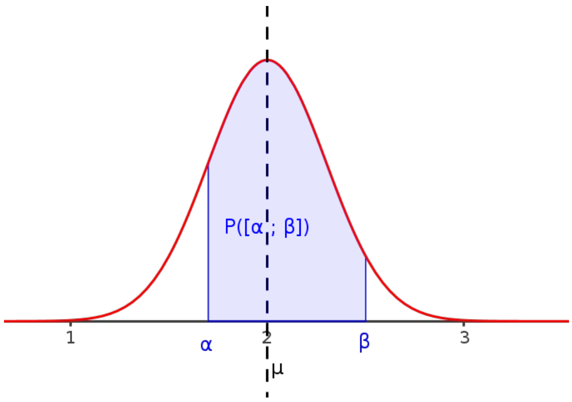
Notation :

Une loi normale de paramètres μ et σ est notée $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$.

2°) Calculs de probabilité :

Définition :

Tout comme pour les autres lois continues, la probabilité que la variable aléatoire soit comprise entre deux valeurs α et β est égale à l'aire sous la courbe entre les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = \beta$, c'est-à-dire, $P(\alpha < X < \beta) = P([\alpha\ ;\ \beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ où f est la fonction densité (dont la représentation graphique est en forme de cloche).

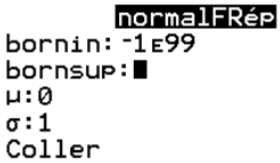


Pour calculer des probabilités, nous utiliserons la calculatrice.

Pour la TI 83 :

Il faut aller dans le menu « distrib » (2nde distrib var) puis prendre la deuxième fonction : « 2 : normalFRép(»

Il faut ensuite compléter les 4 arguments demandés et Coller.

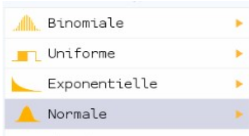


Remarque :

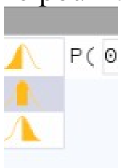
Si on vaut 1E99 remplace ici l'infini.

Pour la Numworks :

On commence par choisir le menu probabilités :



puis normale dans le menu qui apparaît :

On n'a plus qu'à choisir, comme pour la loi binomiale, l'une des options suivantes : 

suivant si l'on veut calculer une probabilité de la forme $P(X \leqslant a)$; $P(a \leqslant X \leqslant b)$ ou $P(X \leqslant b)$.

Exemple :

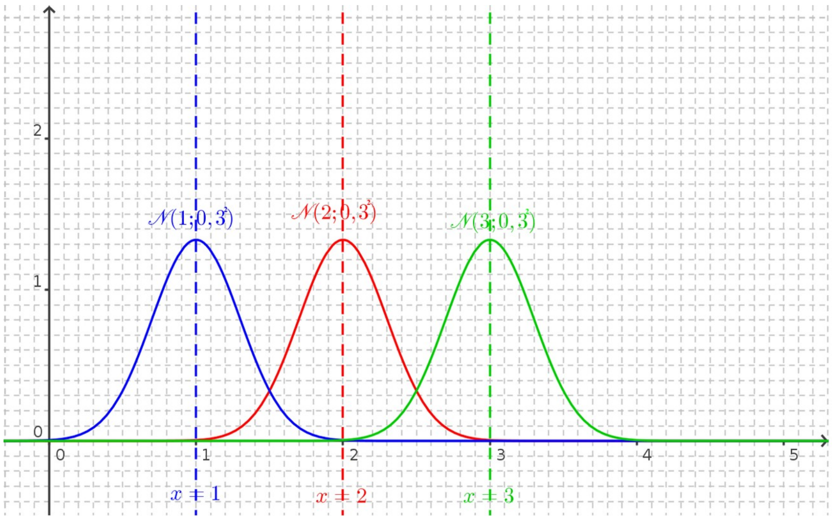
Une expérience aléatoire consiste à choisir un individu au hasard dans la population et à regarder son Quotient Intellectuel. Les tests de QI sont étalonnés pour suivre une loi normale $\mathcal{N}(100 ; 15^2) = \mathcal{N}(100 ; 225)$. Dans ces conditions, la probabilité que l'individu ait un QI compris entre 80 et 120 est de P ([80 ; 120]) ≈ 81,8 % (vérifiez que vous trouvez la même chose avec votre calculatrice).

Si l'on veut connaître la probabilité que le QI soit supérieur à 130, (**sur la TI** on tape bornin : 130 et bornsup : 1E99 ; **sur la Numworks** on choisit). On trouve P (X>130) ≈ 2,28 %.

3°) Espérance et écart type :

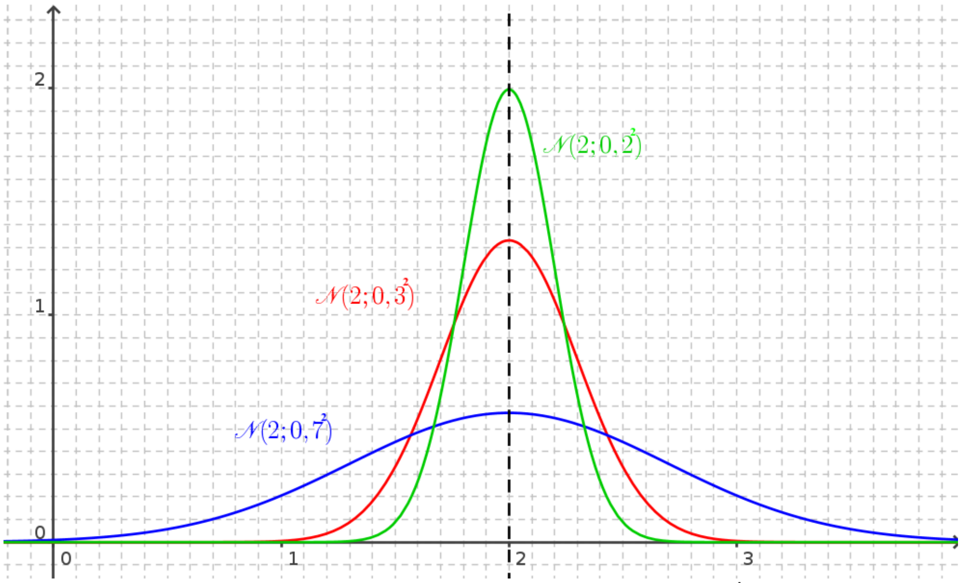
Propriété :

La droite d'équation $x = \mu$ est l'axe de symétrie de la courbe. En faisant varier μ, on fait donc se déplacer la courbe vers la droite ou vers la gauche :



Propriété :

Nous savons que plus l'écart type σ est petit, plus les valeurs de la variable aléatoire sont regroupées autour de l'espérance μ, et plus il est grand, plus les valeurs sont dispersées. μ a donc une influence sur l'évasement de la courbe (l'écart type est l'écart moyen des valeurs par rapport à la moyenne).

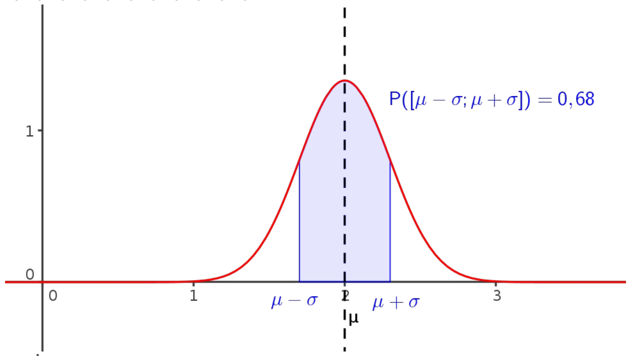


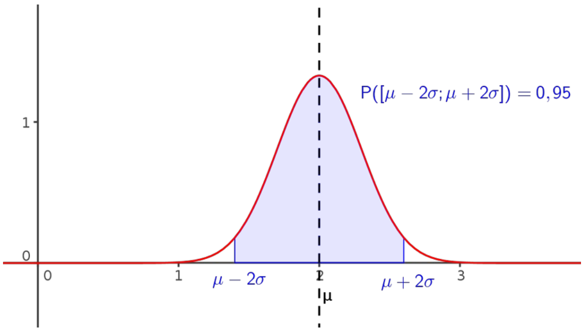
<u>4°) Quelques valeurs à retenir :</u>

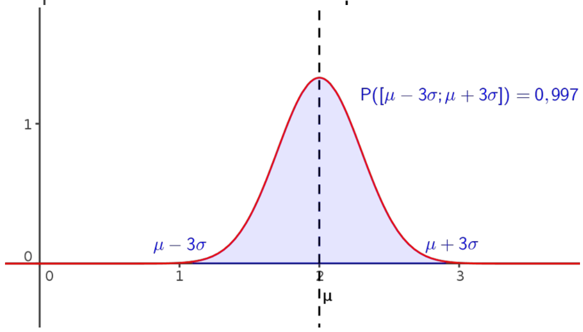
Propriété :

Quelles que soient les valeurs de l'espérance μ et de l'écart type σ, on a toujours :

- $P([\mu - \sigma\ ;\ \mu + \sigma]) = 0{,}68$;
- $P([\mu - 2\sigma\ ;\ \mu + 2\sigma]) = 0{,}95$;
- $P([\mu - 3\sigma\ ;\ \mu + 3\sigma]) = 0{,}997$.







Remarque :

Cela illustre très bien ce que nous disions dans la définition, à savoir que beaucoup de valeurs prises par la V.A. se situent autour de la moyenne, de moins en moins au fur à mesure qu'on s'en éloigne.

Exemple :

Reprenons l'exemple du quotient intellectuel. On rappelle qu'il suit $\mathcal{N}(100\ ;\ 15)$. D'après la propriété précédente, 68 % de la population a un Q.I. dans $[85\ ;\ 115]$, 95 % de la population a un Q.I. dans $[70\ ;\ 130]$ et 99,7 % de la population a un Q.I. dans $[55\ ;\ 145]$.

IV. Approximation de la loi binomiale par une loi normale :

1°) Rappel :

Rappel :

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire ne comportant que 2 issues : un succès avec une probabilité de p et un échec avec une probabilité de $1 - p$.

On appelle schéma de Bernoulli de paramètre n et p, la répétition d'une même épreuve de Bernoulli de façon indépendante n fois. p correspond à la probabilité du succès dans l'épreuve de Bernoulli.

La variable aléatoire X correspondant au nombre de succès obtenus lors d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p suit une loi binomiale de paramètre n et p, notée $\mathscr{B}(n\ ;p)$.

L'espérance d'une variable aléatoire suivant $\mathscr{B}(n\ ;p)$ est $E(X) = np$.

L'écart type d'une variable aléatoire suivant $\mathscr{B}(n\ ;p)$ est $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

2°) Propriété :

Propriété :

Lorsque les produits np et $n(1-p)$ sont suffisamment grands, on approchera la loi $\mathscr{B}(n\ ;p)$ par la loi normale de même espérance et de même écart-type, soit $\mathscr{N}(np\ ;\ \sqrt{np(1-p)}^{\,2})$, soit $\mathscr{N}(np\ ;\ np(1-p))$.

Remarque :

En fait, plus n est grand et plus p est proche de 0,5, plus cette approximation est précise. Concrètement, on ne vous demandera pas de justifier que l'on peut faire cette approximation, on vous dira dans chaque exercice que l'on peut. Habituellement, on estime que cette approximation est valable lorsque $np \geqslant 5$, $n(1-p) \geqslant 5$ et que $n \geqslant 30$.

Exemple :

On estime que la probabilité pour qu'une graine ait perdu son pouvoir germinatif après 3 ans de conservation est de 70%. Sur un échantillon de 100 graines conservées depuis 3 ans quelle est la probabilité pour que moins de 25 germent ? Notons p la probabilité qu'une graine germe ($p = 0,3$) et considérons que l'échantillon est indépendant. Notons X la v.a. « nombre de graines qui germent parmi les 100 ».

X suit la loi $\mathscr{B}(100\ ;0,3)$ et on cherche : $P(X < 25)$ qui peut s'écrire aussi $P(X \leqslant 24)$.

À l'aide de la calculatrice en utilisant les fonction « loi binomiale », on obtient $P(X \leqslant 24) \approx 0,1136$.

On peut aussi calculer une valeur approchée en remplaçant cette loi binomiale par une loi normale.

Pour cela il faut commencer par calculer l'espérance et l'écart type de X :

$E(X) = \mu = np = 30$ et

$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \times 0,3 \times 0,7} \approx 4,5826$.

Nous allons approcher la variable aléatoire discrète X qui suit $\mathscr{B}(100\ ;0,3)$ par la variable aléatoire continue Y qui suit $\mathscr{N}(30\ ;4,5826^2)$.

Nous calculons alors $P(Y < 25)$ que l'on peut taper $P(Y \leqslant 24,5)$ (à cause de la largeur des barres du diagramme en barres). On trouve $P(Y \leqslant 24,5) \approx 0,115$.