LOI BINOMIALE

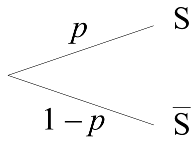
I. Schéma de Bernoulli :

1°) Épreuve de Bernoulli :

Définition :

On appelle épreuve de Bernoulli de paramètre p une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues.

- L'une est appelée succès, de probabilité p, notée S.
- L'autre est appelée échec, de probabilité $1 - p$, notée E ou $\overline{S}$.



Exemple :

Une question d'un QCM est composée de 4 réponses, dont une seule est correcte. En répondant totalement au hasard, un candidat a une probabilité de répondre juste de $\frac{1}{4}$. Celle de répondre faux est donc de $\frac{3}{4}$. On appelle succès l'événement « répondre juste » et échec « répondre faux ».

Cette expérience qui ne comporte que deux issues est donc une épreuve de Bernoulli.

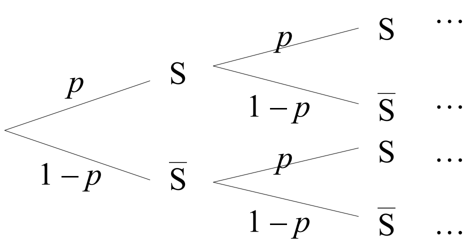
2°) Schéma de Bernoulli :

Définition :

On appelle schéma de Bernoulli toute expérience aléatoire consistant à répéter n fois la même épreuve de Bernoulli de façon indépendante (c'est à dire dans les mêmes conditions, les résultats des premières épreuves n'influant pas sur les résultats des suivantes). On dit que le schéma de Bernoulli est de paramètre n (le nombre de répétitions) et p (la probabilité du succès).

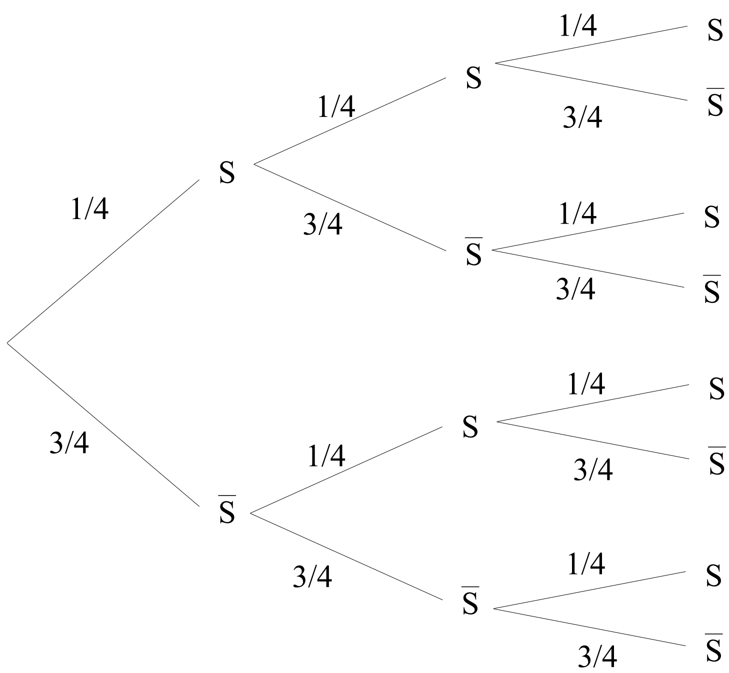
Remarque :

Un résultat d'un schéma de Bernoulli est donc une liste de n issues qui sont soit des succès, soit des échecs. Exemple : $\{S\ ;\ \overline{S}\ ;\ S\ ;\ S\ ;\ ...\ ;\ S\ ;\ \overline{S}\ ;\ \overline{S}\}$.



Exemple :

Reprenons l'exemple précédent : un exercice comporte 3 questions. On est donc en présence d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{4}$. On peut représenter les éventualités sur un arbre pondéré :



Issue	Probabilité
$(S;S;S)$	$(1/4)^3$
$(S;S;\bar{S})$	$(1/4)^2\times(3/4)^1$
$(S;\bar{S};S)$	$(1/4)^2\times(3/4)^1$
$(S;\bar{S};\bar{S})$	$(1/4)^1\times(3/4)^2$
$(\bar{S};S;S)$	$(1/4)^2\times(3/4)^1$
$(\bar{S};S;\bar{S})$	$(1/4)^1\times(3/4)^2$
$(\bar{S};\bar{S};S)$	$(1/4)^1\times(3/4)^2$
$(\bar{S};\bar{S};\bar{S})$	$(3/4)^3$

II. Loi binomiale :

1°) Loi binomiale :

Définition :

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de succès obtenus dans un schéma de Bernoulli de paramètres n (nombre de répétitions) et p (probabilité du succès). La loi de probabilité de la variable X est appelée loi binomiale de paramètres n et p et est notée $\mathscr{B}(n, p)$.

Exemple :

Reprenons l'exemple de l'exercice de QCM avec 3 questions comportant chacune 4 réponses possibles, une seule d'entre elles étant correcte. La variable aléatoire X qui correspond au nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}25$ (c'est-à-dire $\mathscr{B}(3 ; 0{,}25)$). Le nombre de bonnes réponses varie de 0 à 3 donc $X \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$. On obtient la loi de probabilité suivante :

Valeur de X (x_i)	0	1	2	3
$p(X = x_i) = p_i$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3$	$3\times\left(\frac{1}{4}\right)^1\times\left(\frac{3}{4}\right)^2$	$3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^1$	$\left(\frac{1}{4}\right)^3$

Remarque :

$p(X=1) = p(\{(S ; \bar{S} ; \bar{S}) ; (\bar{S} ; S ; \bar{S}) ; (\bar{S} ; \bar{S} ; S)\})$. Nous remarquons que chacun des événements élémentaires qui composent cet événement a la même probabilité : $\left(\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)^2$ (1 succès, 2 échecs).

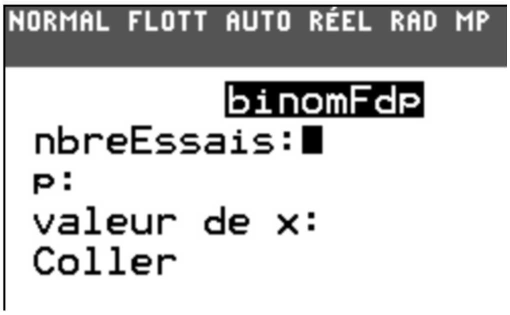
2°) Calcul de probabilités :

Méthode :

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\ ;\ p)$, si l'on veut calculer $p\ (X = k)$, on utilise la calculatrice.

Sur TI : on va dans 

puis on choisit la fonction A:binomFdp(. Enfin on saisit les paramètres dans le menu qui apparaît :



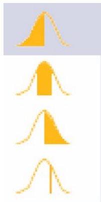
Remarque :

Si on veut calculer $p\ (X \leqslant \text{k})$, dans le même menu on utilise la fonction **binomFRép(**, située juste en dessous de la précédente.

Sur numworks : On va dans le menu 

et on sélectionne « Binomiale ». On règle alors les valeurs de n et de p et on valide sur suivant.

On sélectionne ce que l'on souhaite grâce au menu



Exemple :

La probabilité qu'un candidat qui répond totalement au hasard à l'exercice de QCM obtienne exactement 2 bonnes réponses est **binomFdp(3,0.25,2)** = 0,14,625. Donc $p\ (\text{X} = 2) \approx 14\ \%$.

La probabilité qu'un candidat qui répond totalement au hasard à l'exercice de QCM obtienne 1 bonne réponse ou moins est **binomFRep(3,0.25,1)** = 0,84375. Donc $p\ (\text{X} \leqslant 1) \approx 84\ \%$.

2°) Espérance et variance :

Exemple :

Reprenons la loi de probabilité de notre exemple $\mathscr{B}(3\ ;\ 0{,}25)$:

Valeur de X (x_i)	0	1	2	3
$p\ (X = x_i) = p_i$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3$	$3\times\left(\frac{1}{4}\right)^1\times\left(\frac{3}{4}\right)^2$	$3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^1$	$\left(\frac{1}{4}\right)^3$

L'espérance de cette variable aléatoire est donc de

$$\text{E}\ (X) = 0\times\left(\frac{3}{4}\right)^3+1\times3\times\left(\frac{1}{4}\right)^1\times\left(\frac{3}{4}\right)^2+2\times3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^1+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^3 = 0{,}75.$$

On remarque que $\text{E}\ (X) = 3 \times 0{,}25 = np$. Cette constatation peut être généralisée :

Propriété (admise) :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\ ;\ p)$. Alors

- l'espérance est $\text{E}\ (X) = n \times p$;
- la variance est $\text{V}\ (X) = np(1 - p)$.