

LIMITES DE FONCTIONS

I. Limite infinie en une valeur a ($a \in \mathbb{R}$) :

1°) Définition :

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]-\infty ; a[$ ou $]a ; +\infty[$.

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a par des valeurs inférieures lorsque $f(x)$ peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut pour x suffisamment proche de a en restant inférieur à a dans D_f .

On note $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$.

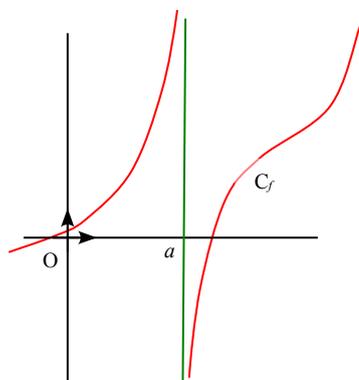
On a la même définition lorsque x tend vers a par des valeurs supérieures à a .

On note $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$.

On a également les mêmes définitions et notations lorsque $f(x)$ tend vers $-\infty$:

$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$.

Exemple :



Pour la fonction dont nous avons la représentation graphique ci-contre, nous avons

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = -\infty$$

2°) Limites de référence :

Théorème :

Limites de référence (admis)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

3°) Asymptote verticale :

Définition :

Soit f une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$.

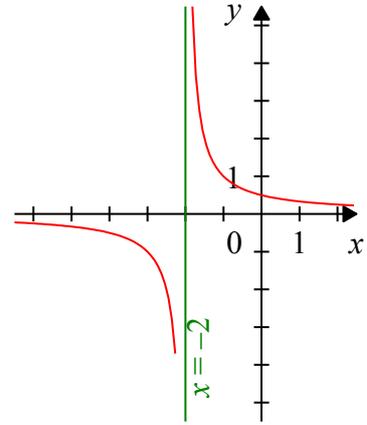
On dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe C_f .

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \frac{1}{x+2}$.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty.$$

Conséquence pour la courbe : la droite d'équation $x = -2$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f .



II. Limites en $+\infty$ ou en $-\infty$:

1°) Limites finie en $+\infty$ ou en $-\infty$:

Définition :

On dit que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers $+\infty$ lorsque que $f(x)$ peut prendre des valeurs aussi proche que l'on veut de L pour x suffisamment grand.

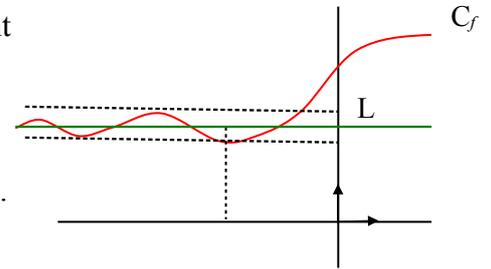
On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

On dit que la droite (d) d'équation $y = L$ est une asymptote à C_f en $+\infty$.

On dit que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers $-\infty$ lorsque que $f(x)$ peut prendre des valeurs aussi proche que l'on veut de L pour x suffisamment petit et négatif.

On note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

On dit que la droite (d) d'équation $y = L$ est une asymptote à C_f en $-\infty$.



Théorème :

Limites de référence (admis)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+ ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0^+ ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+ ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0^+$$

2°) Limites infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$:

Définition :

Dire que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ veut dire que $f(x)$ devient aussi grand que l'on veut quand x devient très grand.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Dire que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ veut dire que $-f(x)$ devient aussi grand que l'on veut quand x devient très grand.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Théorème :

Limites de référence (admis)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} |x| = +\infty.$$

De façon analogue, on peut définir la limite en $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = +\infty.$$

Il faut également savoir :

- si $a > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} ax+b = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} ax+b = -\infty$.
- si $a < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} ax+b = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} ax+b = +\infty$.

3°) Asymptote oblique :

Définition :

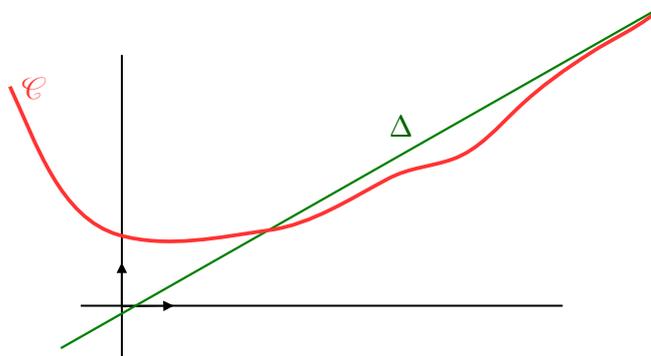
Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$, on dit que la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à la courbe représentative \mathcal{C} de f .

Remarque :

Ces deux limites signifient que la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f se rapproche de plus en plus de la droite Δ , courbe représentative d'une fonction affine $g(x) = ax + b$

Remarque :

Cette asymptote n'est ni verticale, ni horizontale. On parle alors d'asymptote oblique.



III. Opérations sur les limites :

On considère deux fonctions f et g de limite connue en a . a désigne soit un nombre (y compris 0), soit $+\infty$ soit $-\infty$.

1°) Limite d'une somme :

| | | | | | | |
|-----------------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $f(x)$ | L | L | L | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $g(x)$ | L' | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $(f(x) + g(x))$ | $L + L'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | F.I. |

2°) Limite d'un produit :

| | | | | | | | | | |
|---------------|---------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------------|
| $f(x)$ | L | $L > 0$ | $L > 0$ | $L < 0$ | $L < 0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 |
| $g(x)$ | L' | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $\neq \infty$ |
| $(f(x).g(x))$ | $L \times L'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | F.I. |

3°) Limite d'un quotient :

| | Cas où la limite de g n'est pas nulle | | | | | | | Cas où la limite de g est nulle | | | | |
|---------------------|---|---------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------------------------|-----------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|------|
| $f(x)$ | L | L | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $L > 0$ ou $+\infty$ | $L > 0$ ou $+\infty$ | $L < 0$ ou $-\infty$ | $L < 0$ ou $-\infty$ | 0 |
| $g(x)$ | L' | $+\infty$ ou $-\infty$ | $L' > 0$ | $L' < 0$ | $L' > 0$ | $L' < 0$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | 0 en restant positive | 0 en restant négative | 0 en restant positive | 0 en restant négative | 0 |
| $\frac{f(x)}{g(x)}$ | $\frac{L}{L'}$ | 0 | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | F.I. | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | F.I. |

4°) cas particuliers : Polynômes et fonctions rationnelles :

Propriétés :

En cas de forme indéterminée, la limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

En cas de forme indéterminée, la limite d'une fonction rationnelle (quotient de fonctions polynômes) en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.

Exemples :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^3 - 2x^2 + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^3 = +\infty. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty.$$

IV. Limite de $f(u(x))$ et de $(u(x))^n$:

1°) Limite de $f(u(x))$:

Propriété :

Soient deux fonctions : u définie de I dans J et f de J dans \mathbb{R} .

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} u(x) = b \text{ et } \lim_{x \rightarrow b} f(x) = c, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} f(u(x)) = c.$$

Exemples :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} x - 2 = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$
$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x + 2 = 4 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + x + 2} = 2.$$

2°) Limite de $(u(x))^n$:

Propriété :

n est un entier naturel non nul et l est un réel.

$$\lim_{x \rightarrow l} x^n = l^n.$$

$$\text{Si } n \text{ est pair, } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty.$$

$$\text{Si } n \text{ est impair, } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty.$$

Exemples :

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^3 = 27 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty.$$

Propriété :

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} u(x) = l \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} (u(x))^n = l^n.$$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} u(x) = +\infty \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} (u(x))^n = +\infty.$$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} u(x) = -\infty \text{ alors si } n \text{ est pair } \lim_{x \rightarrow a} (u(x))^n = +\infty.$$

$$\text{si } n \text{ est impair } \lim_{x \rightarrow a} (u(x))^n = -\infty.$$

Exemple :

On cherche la limite de $(-2x + 3)^9$ en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x + 3 = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 3)^9 = -\infty.$$