PRODUIT D'UN VECTEURS PAR UN RÉEL

I. Vecteurs du plan (rappel) :

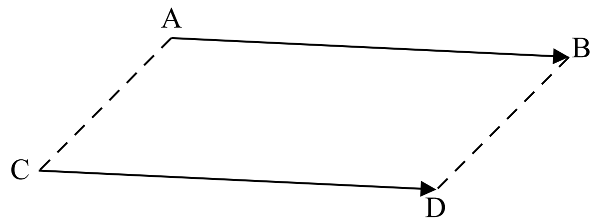
Un vecteur est un trajet que l'on représente à l'aide d'une flèche.

1°) Égalité de deux vecteurs

On dit que deux vecteurs sont **égaux** lorsqu'ils ont :

- la même direction
- le même sens
- la même longueur

Exemple :



Remarque :

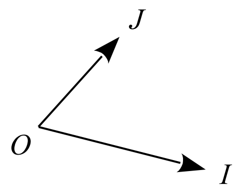
Dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ revient à dire que *ABDC* est un parallélogramme.

2°) Coordonnées :

Soient O, I et J trois points non alignés du plan.

On pose $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$.

On parle alors de repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



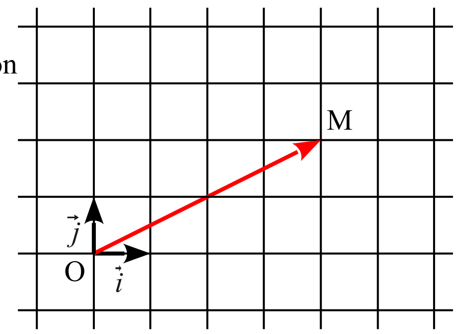
Définition :

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un couple (x ; y) tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ que l'on appelle ses **coordonnées**.

Exemple :

$\vec{u} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ et on note : $\vec{u}$ (4 ; 2) ou $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.



Remarque :

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont les mêmes que celles du point M.

II. Produit d'un vecteur par un réel :

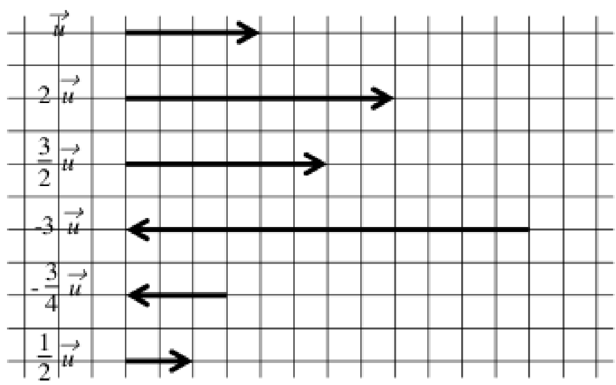
1°) Définition :

Définition :

Soit k un nombre réel et $\vec{u}$ un vecteur.

On appelle **produit de k par $\vec{u}$** le vecteur noté $k.\vec{u}$ caractérisé par :

- La même direction que $\vec{u}$.
- Le même sens que $\vec{u}$ si k est positif, le sens contraire de $\vec{u}$ si k est négatif.
- Une longueur égale à k fois la longueur de $\vec{u}$ si k est positif et $-k$ fois la longueur de $\vec{u}$ si k est négatif.



2°) Coordonnées :

Propriété :

Soit un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et k un nombre réel. Alors on a $k\,\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

III. Colinéarité de deux vecteurs :

1°) Vecteurs colinéaires :

Définition :

On dit que deux vecteurs non nuls sont **colinéaires** quand ils ont la même direction.

Le vecteur nul est colinéaire avec tous les vecteurs.

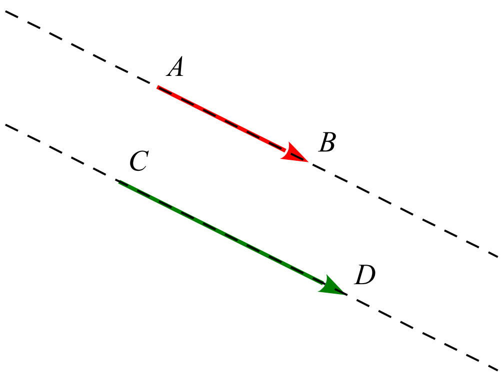
Propriété :

Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à dire qu'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$.

2°) Applications :

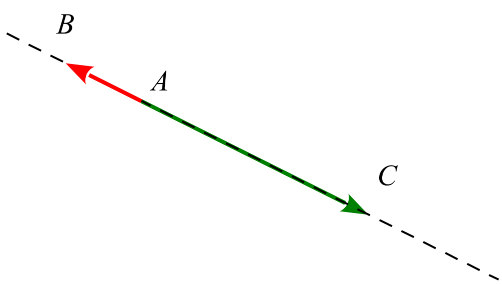
Démontrer le parallélisme :

$\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}$ équivaut à dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.



Démontrer l'alignement :

$\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$ équivaut à dire que les points A, B et C sont alignés



3°) Coordonnées :

Théorème :

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles,

c'est-à-dire si $xy' - x'y = 0$

Exemple :

Montrons que $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

$xy' - x'y = 3 \times 4 - 2 \times 6 = 12 - 12 = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.