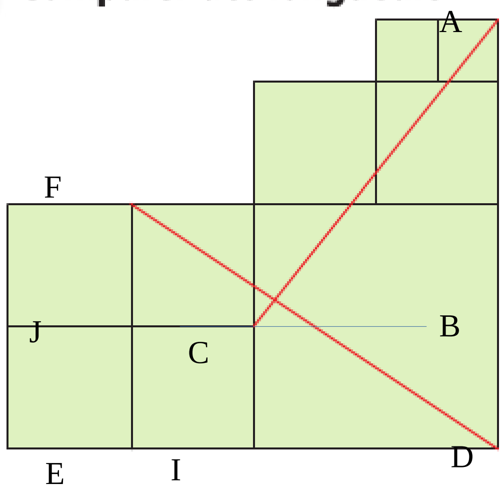
97 Problème ouvert **Comparer des longueurs**

La figure ci-contre est constituée d'un assemblage de carrés. Comparer les longueurs des segments tracés en rouge.



Dans la figure, il y a 3 types de carrés : des petits, des moyens et des grands. Soit a la longueur du côté d'un petit carré, alors, d'après la figure, un carré moyen a pour côté $2a$ et un grand $4a$.

Dans le triangle ABC, nous avons donc $AB = 2a + 2a + a = 5a$ et $BC = 2a + 2a = 4a$.
Et dans le triangle DEF, nous avons $ED = 2a + 2a + 2a = 6a$ et $EF = 2a + 2a = 4a$.

<u>Méthode 1 :</u>
ABC est un triangle rectangle dont l'un des côtés de l'angle droit mesure $4a$ et l'autre $5a$. Le triangle DEF a aussi un côté de l'angle droit qui mesure $4a$, mais l'autre mesure $6a$. Son hypoténuse est donc forcément plus grande que celle de ABC.

<u>Méthode 2 :</u>
ABC est rectangle en B, donc d'après le théorème de Pythagore,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$AC^2 = (5a)^2 + (4a)^2$$
$$AC^2 = 25a^2 + 16a^2$$
$$AC^2 = 41a^2$$

DEF est rectangle en E, donc d'après le théorème de Pythagore,

$$DF^2 = DE^2 + FE^2$$
$$DF^2 = (6a)^2 + (4a)^2$$
$$DF^2 = 36a^2 + 16a^2$$
$$DF^2 = 52a^2$$

On a donc $DF^2 > AC^2$, et comme AC et DF sont des longueurs, donc positives, on en conclut que $DF > AC$.

<u>Méthode 3 (ma préférée) :</u>

Plaçons nous dans le repère (E ; I, J) qui est orthonormé (puisque la figure est constitué de carrés, d'après l'énoncé.

On a alors $D\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ et $F\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ et donc $DF^2 = (x_D - x_F)^2 + (y_D - y_F)^2 = (3 - 0)^2 + (0 - 2)^2 = 9 + 4 = 13$

On a aussi $C\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix}3\\3{,}5\end{pmatrix}$ et donc $AC^2 = (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 = (3 - 1)^2 + (3{,}5 - 1)^2 = 4 + 6{,}25 = 10{,}25$.

Donc $DF^2 > AC^2$, donc $DF > AC$.