

GÉOMÉTRIE REPÉRÉE

I. Équation cartésienne de droites :

1°) Rappels de seconde :

Propriété :

Dans un repère, toute droite (d) a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$. Un vecteur directeur de (d) est le vecteur $\vec{u}(-b ; a)$.

Preuve :

Soit $\vec{u}(r ; s)$ un vecteur directeur de la droite (d) et $A(x_A ; y_A)$ un point de (d)

$M(x ; y) \in (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Or $\overrightarrow{AM}(x - x_A ; y - y_A)$

$$\Leftrightarrow (x - x_A) \times s - (y - y_A) \times r = 0 \Leftrightarrow sx - ry + ry_A - rx_A = 0.$$

Cette équation est de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = s$, $b = -r$ et $c = ry_A - sx_A$.

Comme $\vec{u} \neq 0$, on a $(r ; s) \neq (0 ; 0)$ et donc $(a ; b) \neq (0 ; 0)$ et $\vec{u}(-b ; a)$ est un vecteur directeur de (d) .

Propriété :

Dans un repère du plan, l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $ax + by + c = 0$ avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b ; a)$.

Preuve :

Soit (E) l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $ax + by + c = 0$ avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$

• Si $b \neq 0$, l'équation (E) s'écrit $y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$. C'est l'équation réduite d'une droite de la forme $y = mx + p$ de vecteur directeur $\vec{u}(1 ; m)$ ou $\left(1 ; -\frac{a}{b}\right)$. Mais si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d) , $-b\vec{u}(-b ; a)$ aussi.

• Si $b = 0$, ($a \neq 0$) l'équation (E) s'écrit $ax + c = 0$ c'est à dire $x = -\frac{c}{a}$. Il s'agit bien de l'équation d'une droite, parallèle à l'axe des ordonnées, et donc de vecteur directeur de coordonnées $(0 ; a) = (-b ; a)$.

Définition :

Dans un repère du plan, toute équation de droite de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$ est appelée équation cartésienne.

Exemple :

Déterminons une équation cartésienne de la droite d passant par $A(2 ; -1)$ et ayant pour coefficient directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow 3(x-2) - 2(y+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 6 - 2y - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 2y - 8 = 0$$

Remarque :

Une droite admet une infinité d'équations cartésiennes. En effet, si $ax + by + c = 0$ est une équation de la droite, alors pour tout réel k non nul, $kax + kby + kc = 0$ est aussi une équation de la droite.

Exemple :

La droite d de l'exemple ci-dessus a aussi pour équation : $6x - 4y - 16 = 0$, ou $-3x + 2y + 8 = 0$ par exemple.

2°) Vecteur normal à une droite :

Définition :

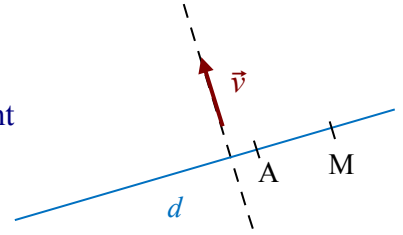
Un **vecteur normal** à une droite d est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de d .

Propriété :

Soit d une droite, A un point de d et $\vec{v}$ un vecteur normal à d .

La droite d est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

C'est à dire : $M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = 0$.



2°) Équation d'une droite dont on connaît un point et un vecteur normal :

Propriété :

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal et $\vec{v}(a; b)$ un vecteur non nul.

- Si le vecteur $\vec{v}$ est normal à une droite d , alors d a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ (où c est un réel)
- Réciproquement, toute droite ayant une équation de la forme $ax + by + c = 0$ (avec $(a; b) \neq (0; 0)$) admet le vecteur $\vec{v}(a; b)$ comme vecteur normal.

Preuve :

- Soit $A(x_0; y_0)$ un point de d et $M(x; y)$ un point du plan, alors :

$M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = 0$. On a $\vec{v}(a; b)$ et $\overrightarrow{AM}(x - x_0; y - y_0)$.

Ainsi $M \in d \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow ax + by - (ax_0 + by_0) = 0 \Leftrightarrow ax + by + c = 0$, en posant $c = -(ax_0 + by_0)$

- Réciproquement : si la droite d a pour équation $ax + by + c = 0$, alors le vecteur $\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de d . Or $\vec{u} \cdot \vec{v} = a(-b) + ba = 0$.

Ainsi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et $\vec{v}$ est normal à d .

Exemple :

Soient $A\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $B\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -5 \end{smallmatrix}\right)$ et $C\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. Déterminer une équation de la droite d perpendiculaire à (AB) passant par C .

$$\overrightarrow{AB}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -6 \end{smallmatrix}\right). \text{ Soit } M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right). \overrightarrow{AM}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y-1 \end{smallmatrix}\right) \quad M \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow 3x - 6(y - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow 3x - 6y + 6 = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2 = 0.$$

L'équation cartésienne de la droite d est donc $x - 2y + 2 = 0$.

Exemple 2 :

Voir la vidéo capacité 1 p 277.

Remarque :

Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à la droite d , alors tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal à la droite d .

Remarque :

Un vecteur normal à une droite d est un vecteur directeur de toute droite perpendiculaire à d .

II. Équations cartésiennes de cercle :

1°) Cercle de centre et de rayon donnés :

Propriété :

Soit A un point du plan et r un réel positif.

Le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon r est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}^2 = r^2$.

Preuve :

Soit M un point du plan.

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow AM = r \Leftrightarrow AM^2 = r^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}^2 = r^2.$$

Propriété :

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(x_0; y_0)$ et de rayon r est

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Preuve :

Le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(x_0; y_0)$ et de rayon r est l'ensemble des points M $(x; y)$ du plan tels que $\overrightarrow{AM}^2 = r^2$. $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x - x_0; y - y_0)$ et donc $\overrightarrow{AM}^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$.

Exemple :

Une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre A $(-2; 5)$ et de rayon 3 est $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$.

Exemple 2 :

Voir vidéo capacité 2 p 279.

2°) Cercle de diamètre donné :

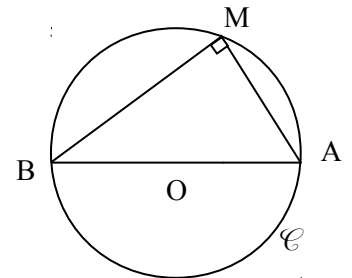
Propriété :

Soient A et B deux points distincts du plan.

Le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Preuve :

Comme vous le savez depuis longtemps, le cercle $\mathcal{C}$, privé des points A et B, est l'ensemble des points M du plan tels que le triangle MAB est rectangle en M, c'est-à-dire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ sauf A et B. D'autre part, si $M = A$ ou $M = B$, alors $\overrightarrow{MA} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ et ce sont les deux derniers points tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.



Exemple :

Déterminons une équation du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ avec A $(1; 1)$ et B $(-2; 3)$.

Soit M $(x; y)$. $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-3 \end{pmatrix}$.

$$\text{On a donc } M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) + (y-1)(y-3) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 + y^2 - 4y + 3 = 0.$$

Une équation du cercle $\mathcal{C}$ est donc $x^2 + x + y^2 - 4y + 1 = 0$.

3°) Équation de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$:

Remarque :

En développant une équation de cercle, on obtient une équation de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Mais, réciproquement, est-ce que toutes les équations de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ sont des équations de cercles ?

Propriété :

Pour savoir si (E) : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ est une équation de cercle, on met (E) sous la forme $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R$.

Si $R \geq 0$, (E) est l'équation du cercle de centre $\Omega (x_0 ; y_0)$ et de rayon $\sqrt{R}$.

Si $R < 0$, (E) n'est pas une équation de cercle.

Exemple 1 :

Soit l'équation $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 12 = 0$. Est-ce une équation de cercle ? Et si oui, quels sont son centre et son rayon ?

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 - 6y + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 - 1 + (y - 3)^2 - 9 + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = -2$$

Dans ce cas, on se rend compte que le membre de gauche, comme somme de carrés, est forcément positif, alors que le membre de droite est négatif. Cette équation n'admet donc aucune solution et ce n'est donc pas une équation de cercle (ni d'autre chose d'ailleurs).

Exemple 2 :

Soit l'équation $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$. Est-ce une équation de cercle ? Et si oui, quels sont son centre et son rayon ?

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 - 6y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 - 1 + (y - 3)^2 - 9 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$$

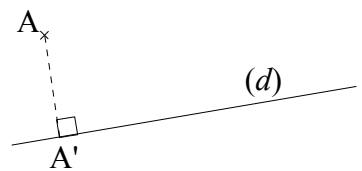
Dans ce cas, cette équation revient $\Omega M^2 = r^2$ avec $\Omega (-1 ; 3)$, $M (x ; y)$ et $r = 3$. C'est donc l'équation du cercle de centre $\Omega (-1 ; 3)$ et de rayon 3.

III. Projeté orthogonal :

1°) Définition (rappel) :

Définition :

Soit une droite (d) et A un point quelconque du plan. Le projeté orthogonal de A sur (d) est le point d'intersection entre (d) et sa perpendiculaire passant par A.



Exemple :

Sur la figure ci-contre, le Point A' est le projeté orthogonal de A sur (d) .

2°) Détermination des coordonnées du projeté orthogonal d'un point :

Méthode :

Le projeté orthogonal est défini comme étant l'intersection de deux droites, ses coordonnées sont donc les solution du système formé par les équations de ces deux droites.

Exemple :

Soit A' le projeté orthogonal de A (1 ; 3) sur la droite (d) d'équation $2x + y + 5 = 0$. Quelles sont ses coordonnées ?

Commençons par chercher l'équation de (d'), droite perpendiculaire à (d) passant par A :

$\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d), donc un vecteur normal à (d').

$$\text{Donc } M(x; y) \in (d') \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -(x-1) + 2(y-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x + 2y - 5 = 0$$

A' est l'intersection de (d) et de (d'), ses coordonnées sont donc les solutions de :

$$\begin{cases} 2x + y + 5 = 0 & L_1 \\ -x + 2y - 5 = 0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 5 = 0 & L_1 \\ 5y - 5 = 0 & L_3 = L_1 + 2L_2 \end{cases}$$

L_3 nous donne alors $y = 1$. Et donc L_1 revient à $2x + 1 + 5 = 0$, soit $x = -3$.

Les coordonnées de A' sont donc A' (-3 ; 1).

Exemple 2 :

Voir vidéo capacité 3 p 280.