SUITES ARITHMÉTIQUES
SUITES GÉOMÉTRIQUES

I. Suites arithmétiques :

1°) Définition :

Définition :

On appelle suite arithmétique toute suite numérique dont chaque terme s'obtient en ajoutant un nombre constant r au terme précédent. Le nombre r est appelé raison de la suite.

Elle est donc définie par récurrence par : $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$.

Exemple :

Soit la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -7 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$. On a alors $u_1 = -3$; $u_2 = 1$; $u_3 = 5$; $u_4 = 9$ (…)

2°) Propriété :

Propriété :

Soit (u_n) une suite arithmétique de 1er terme u_0 et de raison r. Alors pour tout n, on a : $u_n = u_0 + nr$.

Preuve (exemplaire):

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, c'est-à-dire que $u_{n+1} = u_n + r$.

Considérons la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_0 + nr$.

On a alors $v_{n+1} = u_0 + (n + 1)r = u_0 + nr + r = v_n + r$. De plus $v_0 = u_0 + 0\times r = u_0$.

La suite (v_n) est donc la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, il s'agit donc bien de (u_n).

Remarque :

Si le premier terme de la suite est u_1, on a : $u_n = u_1 + (n - 1)r$. Plus généralement, on a : $u_n = u_p + (n - p)r$.

Preuve :

$u_n - u_p = u_0 + nr - (u_0 + pr) = u_0 + nr - u_0 - pr = (n - p)r$.

Conclusion :

Pour prouver qu'une suite (u_n) est une suite arithmétique, on a donc au moins trois possibilités :

(i) Calculer $u_{n+1} - u_n$ et montrer qu'il s'agit d'une constante (qui est la raison de la suite) ;

(ii) Écrire le terme général u_n en fonction de n pour reconnaître $u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_1 + (n - 1)r$;

(iii) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et trouver la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + r$.

Exemple : (voir aussi video capacité 4 p 147)

La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2 + 3n$ est–elle une suite arithmétique ?

(i) On calcule $u_{n+1} - u_n = 2 + 3(n + 1) - (2 + 3n) = 3$ (une constante). (u_n) est donc une suite arithmétique de raison 3.

(ii) $u_n = 2 + 3n = u_0 + nr$ avec $u_0 = 2$ et $r = 3$. (u_n) est donc une suite arithmétique de premier terme 2 et de raison 3.

(iii) $u_{n+1} = 2 + 3(n + 1) = 2 + 3n + 3 = u_n + 3$. (u_n) est donc une suite arithmétique de raison 3.

3°) Somme des premiers termes d'une suite arithmétique :

Propriété :

La somme S_n des « n premiers entiers » est donnée par la formule :

$$S_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration (exemplaire):

On sait que : $S_n = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n$

Mais on peut aussi écrire : $S_n = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1$

En additionnant on obtient : $2S_n = (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1)$

Donc $2S_n = n(n+1)$

D'où :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{(CQFD)}$$

Propriété :

La somme des $n + 1$ premiers termes (de u_0 à u_n) d'une suite arithmétique est :

$$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{(u_0+u_n)(n+1)}{2}$$

ou

$$S = \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme}) \times \text{nombre de termes}}{2}$$

Démonstration :

Soit $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

Or d'après la propriété, pour tout n on a : $u_n = u_0 + nr$

Donc $S = u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \ldots + (u_0 + nr)$

$= (n+1)u_0 + \mathrm{r}\,(1 + 2 + \ldots + n)$

$= (n+1)u_0 + r\dfrac{n(n+1)}{2}$ (propriété précédente)

$= \dfrac{n+1}{2}(2u_0+nr)$

$= \dfrac{n+1}{2}(u_0+u_0+nr)$

$= \dfrac{n+1}{2}(u_0+u_n)$ (CQFD)

II. Suites géométriques :

1°) Définition :

Définition :

On appelle suite géométrique toute suite numérique dont chaque terme s'obtient en multipliant par un nombre constant q le terme précédent. Le nombre q est appelé raison de la suite.

Elle est donc définie par récurrence par : $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = q\,u_n \end{cases}$.

Exemples :

– La suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$.

u_0 ;	u_1 ;	u_2 ;	u_3 ;	u_4 ;
1	2	4	8	16

(u_n) est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.

– La suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 12$ et de raison $-\frac{1}{2}$

v_0 ;	v_1 ;	v_2 ;	v_3 ;	v_4 ;
12	–6	3	–1,5	0,75

2°) Terme général d'une suite géométrique :

Propriété :

Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 \times q^n$.

Preuve (exemplaire) :

Soit (u_n) la suite géométrique de terme initial u_0 et de raison q.

Considérons la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_0 \times q^n$.

Le premier terme de (v_n) est bien $v_0 = u_0 \times q^0 = u_0$. De plus $v_{n+1} = u_0 \times q^{(n+1)} = u_0 \times q^n \times q = v_n \times q$.

La suite (v_n) est donc la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, il s'agit donc bien de (u_n).

Remarque :

Si le premier terme de la suite est u_1, on a : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$. Plus généralement, on a : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Preuve :

$\frac{u_n}{u_p} = \frac{u_0 \times q^n}{u_0 \times q^p} = \frac{q^n}{q^p} = q^{n-p}$, d'où $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Exemples : (voir aussi vidéo capacité 5 p 149)

suite géométrique	Expression explicite de u_n
premier terme $u_0 = 2$; $q = 3$	$u_n = u_0 \times q^n$. $u_n = 2 \times 3^n$
premier terme $u_1 = 5$; $q = -\frac{1}{2}$	$u_n = u_1 \times q^{n-1}$. $u_n = 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

Conclusion :

Pour prouver qu'une suite (u_n) est une suite géométrique, on a donc au moins trois possibilités :

(i) Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et montrer qu'il s'agit d'une constante (qui est la raison de la suite) ;

(ii) Écrire le terme général u_n en fonction de n pour reconnaître $u_n = u_0 \times q^n$ ou $u_n = u_1 \times q^{n-1}$;

(iii) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et trouver la relation de récurrence $u_{n+1} = q\, u_n$.

Exemple :

La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2 \times 3^n$ est–elle une suite géométrique ?

(i) On calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} = 3$ (une constante). (u_n) est donc une suite géométrique de raison 3.

(ii) $u_n = 2 \times 3^n = u_0 \times q^n$ avec $u_0 = 2$ et $q = 3$. (u_n) est donc une suite géométrique de premier terme 2 et de raison 3.

(iii) $u_{n+1} = 2 \times 3^{n+1} = 2 \times 3^n \times 3 = u_n \times 3$. (u_n) est donc une suite géométrique de raison 3.

3°) Somme des termes :

Théorème :

Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme $u_0 = 1$, c'est à dire $u_n = q^n$ alors :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = 1 + q + \ldots + q^n = \sum_{i=1}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad S_n = \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$$

Démonstration :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$
$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$$

$$(1-q)S_n = (1-q) + (1-q)q + (1-q)q^2 + (1-q)q^3 + \ldots + (1-q)q^n$$
$$(1-q)S_n = 1 - q + q - q^2 + q^2 - q^3 + q^3 - q^4 + \ldots + q^n - q^{n+1}$$
$$(1-q)S_n = 1 - q^{n+1}$$
$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exemple :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

III. Sens de variation :

1°) Sens de variation d'une suite arithmétique :

Propriété :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$, la suite est croissante.
- Si $r < 0$, la suite est décroissante.
- Si $r = 0$, la suite est constante.

Preuve :

Comme (u_n) est une suite arithmétique, on a $u_{n+1} = u_n + r$ donc $u_{n+1} - u_n = r$. La propriété est donc démontrée grâce à la méthode 1 du chapitre 3.

Vocabulaire :

L'augmentation (resp. la diminution) des termes d'une suite arithmétique croissante (resp. décroissante) est constante. On dit qu'une suite arithmétique est à croissance (resp. décroissance) linéaire.

2°) Sens de variation d'une suite géométrique :

Propriété :

Soit la suite $u_n = q^n$ avec $q > 0$

- si $q > 1$, la suite (u_n) est croissante ;
- si $q = 1$, la suite est constante ;
- si $0 < q < 1$, la suite est décroissante.

Remarque :

Si $q < 0$ la suite est alternativement positive puis négative. Exemple $u_n = (-1)^n$, elle est ni croissante, ni décroissante.

Preuve :

Comme (u_n) est une suite géométrique, on a $u_{n+1} = q \times u_n$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$. La propriété est donc démontrée grâce à la méthode 3 du chapitre 3.

Vocabulaire :

L'augmentation (resp. la diminution) des termes d'une suite géométrique croissante (resp. décroissante) est de plus en plus grande. On dit d'une suite géométrique qu'elle est à croissance (resp. décroissance) exponentielle (on verra le lien avec la fonction exponentielle au chapitre 11).

IV. Modéliser un phénomène discret à croissance linéaire ou exponentielle :

Voir vidéo capacité 7 p 151