

DÉRIVATION

I. Dérivées des fonctions usuelles :

1°) Définition :

Définition :

On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout point de cet intervalle.

Il est donc naturel de définir une nouvelle fonction qui à x associe le nombre dérivé $f'(x)$. Cette fonction s'appelle la dérivée de f et se note f' .

2°) Tableau des dérivées de fonctions usuelles :

	Domaine de définition de f	fonction f	fonction f'	Domaine de définition de f'
1	$\mathbb{R}$	$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
2	$\mathbb{R}$	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
3	$\mathbb{R}$	$f(x) = mx + p$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
4	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
5	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
6	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
7	$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
8	$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
9	$\mathbb{R}^+$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{++}$

Preuves (exemplaires) :

Dérivabilité et fonction dérivée de la fonction carré :

$f(x) = x^2$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$. Montrons qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour cela, on regarde si elle est dérivable en a (réel quelconque). $f(a+h) = a^2 + 2ah + h^2$ et $f(a) = a^2$.

Donc le taux de variation de f entre a et $a+h$ est $\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = 2a + h$.

$\lim_{h \rightarrow 0} 2a + h = 2a$. $2a$ est un nombre fini (quel que soit a), donc la fonction f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$, et ce pour tout a de $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction $f(x) = x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée est $f'(x) = 2x$.

Dérivabilité et fonction dérivée de la fonction inverse :

$f(x) = \frac{1}{x}$. Elle est définie sur $\mathbb{R}^*$. Montrons qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Pour cela, on regarde si elle est dérivable en a (réel quelconque). $f(a+h) = \frac{1}{a+h}$ et $f(a) = \frac{1}{a}$. Donc le

taux de variation de f entre a et $a+h$ est $\tau_a(h) = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a}{a(a+h)} - \frac{a+h}{a(a+h)}}{h} = \frac{a - a - h}{a^2 + ah} \times \frac{1}{h} = -\frac{1}{a^2 + ah}$.

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{a^2 + ah} = -\frac{1}{a^2}$, qui est un nombre fini, donc la fonction f est dérivable en a et $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$, et ce pour tout a de $\mathbb{R}$.

On en déduit que la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que sa fonction dérivée est $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Remarque :

Les lignes 2 et 4 à 8 peuvent se résumer en une seule formule :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{Z}^*, \text{ si } f(x) = x^n, \text{ alors } f'(x) = nx^{n-1}.$$

Il faut simplement faire attention au domaine de définition si $n < 0$.

Remarque :

On remarque que toutes les fonctions de référence ci-dessous sont dérivables sur leur domaine de définition, sauf la fonction racine carrée qui n'est pas dérivable en 0.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x^3}$. On a bien $f(x) = x^n$ avec $n = -3$.

$$\text{Donc } f'(x) = nx^{n-1} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}.$$

3°) Opération sur les fonctions dérivables :

Dans le tableau ci-dessous, u et v sont des fonctions définies sur un même intervalle I et λ est un nombre réel.

Fonction	Fonction dérivée	Exemple
$u + v$	$u' + v'$	Si $f(x) = x + \frac{1}{x}$ alors $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.
λu	$\lambda u'$	Si $f(x) = 3x^2$ alors $f'(x) = 6x$.
uv	$u'v + uv'$	Si $f(x) = x\sqrt{x}$ alors $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.
u^2	$2u'u$	Si $f(x) = (3x^2 + 2)^2$ alors $f'(x) = 2 \times 6x \times (3x^2 + 2) = 12x(3x^2 + 2)$.
$(u \text{ ne s'annule pas sur } I) \frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	Si $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ alors $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$.
$(u \text{ ne s'annule pas sur } I) \frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	Si $f(x) = \frac{2x+3}{4x-4}$ alors $f'(x) = \frac{2(4x-4) - 4(2x+3)}{(4x-4)^2} = \frac{-20}{(4x-4)^2}$.

Preuve (exemplaire) de la dérivée de uv :

Soit une fonction f définie sur un intervalle I , telle que $f = uv$. Soit a un réel de I et h un réel tel que $a + h$ appartienne à I .

$$\begin{aligned}
 \text{Alors } \tau_a(h) &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{uv(a+h) - uv(a)}{h} = \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} \\
 &= \frac{u(a+h)v(a+h) - \textcolor{red}{u(a+h)v(a)} + \textcolor{red}{u(a+h)v(a)} - u(a)v(a)}{h} \\
 &= \frac{\textcolor{red}{u(a+h)v(a+h)} - \textcolor{red}{u(a+h)v(a)}}{h} + \frac{u(a+h)v(a) - u(a)v(a)}{h}
 \end{aligned}$$

$$= u(a+h) \frac{v(a+h)-v(a)}{h} + v(a) \frac{u(a+h)-u(a)}{h}$$

Comme u et v sont dérivables, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$.

De plus $\lim_{h \rightarrow 0} u(a+h) = u(a)$.

On a donc $\lim_{h \rightarrow 0} \tau_a(h) = u(a)v'(a) + u'(a)v(a)$.

donc $f = uv$ est dérivable et $f' = u'v + uv'$.

Exemples :

Regarder les vidéos capacité 1 p 105 et p 107

Exemple (modèle de rédaction) :

Soit $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Nous voulons dériver f .

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{avec } u(x) = x^2 - 3x + 6 \quad \text{et } v(x) = x - 1,$$

$$\text{donc } u'(x) = 2x - 3 \quad \text{et } v'(x) = 1$$

$$\text{Donc } f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \text{ donc } f'(x) = \frac{(2x-3)(x-1) - (x^2-3x+6)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}.$$

4°) Dérivée de $g(ax+b)$:

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et g une fonction définie et dérivable sur J telles que $f(x) = g(ax+b)$, où a et b sont des réels tels que $ax+b \in J$.

Si la fonction g est dérivable sur J , alors f est dérivable sur I et $f'(x) = ag'(ax+b)$.

Exemple :

Soit f la fonction définie et dérivable sur $] -2,5 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x+5}$.

$$f(x) = g(ax+b), \text{ avec } g(x) = \sqrt{x} \text{ et } a = 2. \text{ Donc } g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\text{alors } f'(x) = ag'(ax+b) = a \times \frac{1}{2\sqrt{ax+b}} = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x+5}} = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}.$$

II. Signe de la dérivée et sens de variation :

Théorème (admis) :

Soit f une fonction dérivable sur I .

- f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.
- f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.
- f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Exemple :

Soit $f: x \mapsto x^3$. $f'(x) = 3x^2$ qui est positive sur $\mathbb{R}$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}$. On remarque que f' n'est nulle que pour $x = 0$, on peut donc en conclure que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque :

Si f' ne s'annule que pour un nombre fini de valeurs de I , on dit que f est strictement croissante sur I .

Exemple :

Exemple :

Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x+2}$. f est une fraction rationnelle, donc dérivable sur son domaine de définition, et on a : $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x^2 + 2x + 1$ et $v(x) = x + 2$

$$\text{donc } u'(x) = 2x + 2 \text{ et } v'(x) = 1.$$

Donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{(2x+2)(x+2) - (x^2+2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+4x+2x+4-x^2-2x-1}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}.$$

Pour connaître le sens de variations de f , il faut étudier le signe de sa dérivée. Le dénominateur étant positif, il nous reste donc à étudier le signe du numérateur : $\Delta = 4$, il y a deux racines : $x_1 = -3$ et $x_2 = -1$. $f'(x)$ est négative entre les racines, d'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$			0		

III. Extremum et dérivée :**Théorème :**

Si f est dérivable sur I et admet un extremum local (un maximum local ou un minimum local) en un point a distinct des extrémités de I , alors $f'(a) = 0$.

Exemple :

La fonction f définie dans l'exemple précédent admet un maximum local pour $x = -1$ et un minimum local pour $x = 5$. Nous avons bien $f'(-1) = 0$ et $f'(5) = 0$.

Remarque :

La réciproque de cette propriété n'est pas vraie. En effet, la fonction $f(x) = x^3$ admet pour dérivée $f'(x) = 3x^2$ qui s'annule pour $x = 0$, pour autant f n'admet pas d'extremum local en 0.

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur I . f admet un extremum local en un point a distinct des extrémités de I si et seulement si f' s'annule en changeant de signe en a .