

PRODUIT SCALAIRE

Histoire des mathématiques :

La notion de vecteur était implicite en mécanique depuis Galilée mais a mis longtemps à prendre sa forme actuelle. On observe un lien entre analyse et géométrie en étudiant la façon dont la notion de vecteur apparaît chez Leibniz au cours de ses recherches sur l'élaboration d'un calcul des variations. Le XIXe siècle voit l'élaboration conjointe de ce qui deviendra le produit scalaire et de la notion de travail en physique.

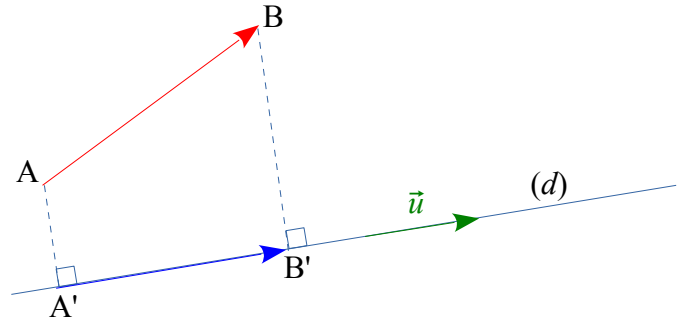
Le calcul vectoriel et le produit scalaire permettent une approche de la géométrie différente de celle des Anciens, sans doute puissante, avec l'avantage de combiner vision géométrique et calcul.

I. Définitions préalables :

1°) Projeté orthogonal d'un vecteur :

Soit une droite (d) et $\overrightarrow{AB}$ un vecteur quelconque du plan. Le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ tel que A' et B' sont les projetés orthogonaux respectifs de A et de B sur (d) est appelé le **projeté orthogonal** de $\overrightarrow{AB}$ sur (d) .

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d) , on dit aussi que $\overrightarrow{A'B'}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AB}$ sur $\vec{u}$.



2°) Norme d'un vecteur (rappel) :

Définition :

La norme d'un vecteur est le nombre réel positif AB et est noté $\|\overrightarrow{AB}\|$. Si le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a alors $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

II. Produit scalaire :

1°) Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires :

Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires. On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le **nombre réel** noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ égal :

– au produit de leurs normes $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ s'ils sont de même sens ;

$$\begin{array}{c} \vec{u} \\ \hline \vec{v} \end{array} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

– à l'opposé du produit des normes $-\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ s'ils sont de sens contraires.

$$\begin{array}{c} \vec{u} \\ \hline \overleftarrow{\vec{v}} \end{array} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

Conséquences :

Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est appelé carré scalaire de $\vec{u}$ et noté $\vec{u}^2$; par définition on a $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.

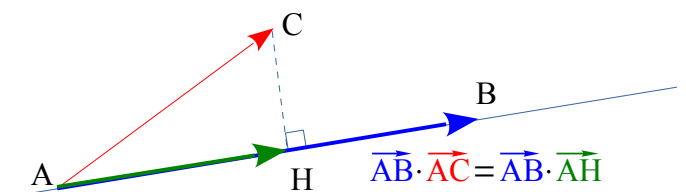
2°) Produit scalaire de deux vecteurs non colinéaires :

Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et $\vec{v'}$ le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$.

On pose par définition : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v'}$.

Autrement dit, le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires est égal au produit scalaire entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB) .



Propriété :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

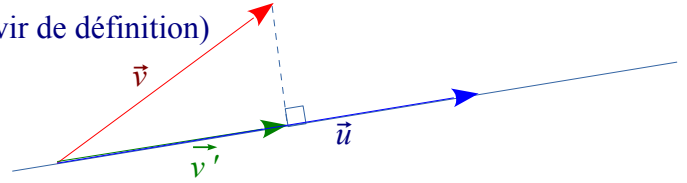
- Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Sinon, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}; \vec{v})$. (formule qui peut servir de définition)

Remarque :

Cette propriété peut aussi servir de définition.

Démonstration :

- $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, évident.
- dans le triangle rectangle formé par $\vec{v}$ et $\vec{v}'$, $\|\vec{v}'\| = \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}; \vec{v})$



Propriété :

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Démonstration :

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0 \text{ si et seulement si } \|\vec{u}\| = 0 \text{ ou } \|\vec{v}\| = 0 \text{ ou } \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0.$$

Ce qui signifie que $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{2} (\pi)$. CQFD.

3) Propriétés du produit scalaire :

Propriétés :

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et le réel k , on a :

- 1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (symétrie du produit scalaire)
- 2) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (distributivité du produit scalaire par rapport à l'addition)
- 3) $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ (linéarité du produit scalaire)

Théorème (« identités remarquables »)

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$1) \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\text{d'où } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \text{ (formule qui peut servir de définition)}$$

$$2) \quad \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\text{d'où } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

$$3) \quad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

Exemple :

voir vidéo capacité 2 p 249

III. Produit scalaire et géométrie analytique :

Théorème :

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormale du plan.

Si on considère deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Démonstration :

On rappelle que $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ équivaut à $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$;

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x\vec{i} \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j}) + y\vec{j} \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j}) \quad \text{par distributivité à gauche}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x\vec{i} \cdot x'\vec{i} + x\vec{i} \cdot y'\vec{j} + y\vec{j} \cdot x'\vec{i} + y\vec{j} \cdot y'\vec{j} \quad \text{par distributivité à droite}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx'(\vec{i} \cdot \vec{i}) + xy'(\vec{i} \cdot \vec{j}) + yx'(\vec{j} \cdot \vec{i}) + yy'(\vec{j} \cdot \vec{j}) \quad \text{par linéarité}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' \times 1 + xy' \times 0 + yx' \times 0 + yy' \times 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Corollaire :

On retrouve alors la formule de la norme d'un vecteur : $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2$.

IV. Calcul de longueurs et d'angles :

1°) Transformation de l'expression $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$:

a) Propriété :-

Propriété :

Soient A et B deux points et I le milieu du segment [AB].

Pour tout point M du plan on a : $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$.

Preuve (exemplaire) :

$$\begin{aligned} \vec{MA} \cdot \vec{MB} &= (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} + \vec{IB}) \\ &= \vec{MI}^2 + \vec{MI} \cdot \vec{IB} + \vec{IA} \cdot \vec{MI} + \vec{IA} \cdot \vec{IB} \\ &= \vec{MI}^2 + \vec{MI} \cdot (\vec{IA} + \vec{IB}) + \vec{IA} \cdot \vec{IB} \end{aligned}$$

or I milieu de [AB] donc $\bullet \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$

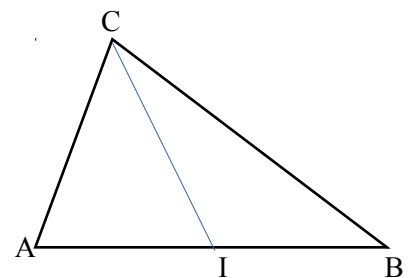
$$\bullet -\vec{IA} = \vec{IB} = \frac{1}{2}\vec{AB} \quad \text{donc} \quad \vec{IA} \cdot \vec{IB} = -\frac{1}{4}\vec{AB}^2 = -\frac{1}{4}AB^2$$

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \vec{MI}^2 + \vec{MI} \cdot \vec{0} - \frac{1}{4}\vec{AB}^2 = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 \quad \text{CQFD}$$

Exemple :

Soient ABC un triangle et I le milieu de [AB] tel que CI = 3, AB = 4.

On a alors $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = CI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = 3^2 - \frac{1}{4}4^2 = 9 - 4 = 5$.



b) Application :

Propriété :

Soient A et B deux points distincts du plan.

L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$.

Preuve (exemplaire) :

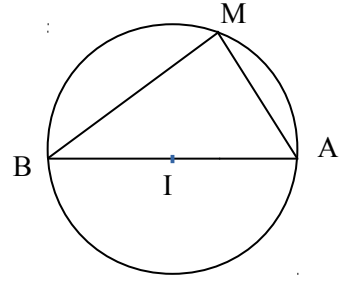
Soit I le milieu de $[AB]$.

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = 0 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{4}AB^2$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \left(\frac{1}{2}AB\right)^2$$

$$\Leftrightarrow MI = \frac{1}{2}AB \text{ ce qui signifie que M appartient au cercle de centre}$$

I et de rayon $\frac{1}{2}AB$, c'est-à-dire le cercle de diamètre $[AB]$.



2°) Formule d'Al-Kashi :

Propriété :

Soit ABC un triangle quelconque, non aplati, dont on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$ les trois longueurs des côtés (supposées donc toutes trois non nulles).

$$\text{Alors : } a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos(\hat{A})$$

$$\text{De même } b^2 = a^2 + c^2 - 2accos(\hat{B}) \text{ et } c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos(\hat{C}).$$

Démonstration (exemplaire) :

$$\text{On a } BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2AC \times AB \times \cos(\hat{A})$$

$$\text{Ainsi } a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos(\hat{A})$$

Les autres démonstrations sont identiques.

Remarque :

On appelle parfois cette relation le théorème de Pythagore généralisé, en effet :

Si le triangle est rectangle en A, alors $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(90)$. Or $\cos(90) = 0$ donc $a^2 = b^2 + c^2$ (On retrouve le théorème de Pythagore).

Exemple :

Soit le triangle ABC ci-contre. On peut alors calculer la longueur BC :

$$BC^2 = a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos(\hat{A}) = 4^2 + 3^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \cos(30) = 16 + 9 - 24 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 25 - 12\sqrt{3}$$

$$\text{Soit } BC = \sqrt{25 - 12\sqrt{3}} \approx 2,05 \text{ (arrondi au centième).}$$

