DÉRIVATION

I. Taux d'accroissement (ou de variation) et nombre dérivé :

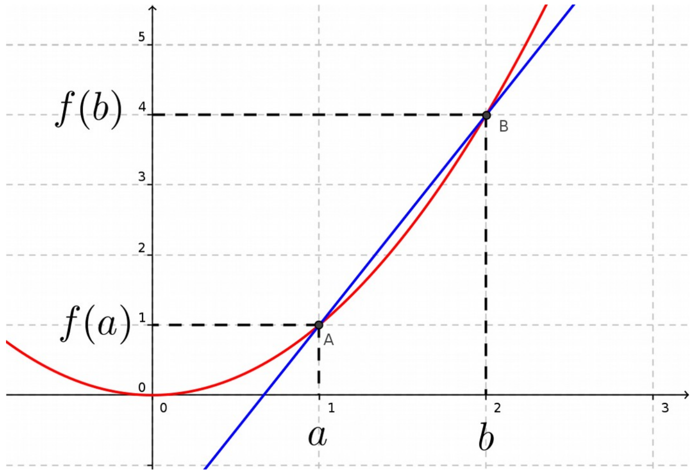
1°) Taux d'accroissement :

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a et b deux nombres de I.

On appelle taux de variation de la fonction f entre a et b le nombre $\tau = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Ce nombre τ correspond au coefficient directeur de la droite (AB) avec A $(a\,;f(a))$ et B $(b\,;f(b))$.



Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Le taux de variation de la fonction f entre 1 et 2 est $\tau = \dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=\dfrac{4-1}{2-1}=3$. Sur le graphique ci-contre, il correspond au coefficient directeur de la droite (AB), où A (1 ; 1) et B (2 ; 4) sont deux points de $\mathscr{C}_f$.

Remarque :

Seules les fonctions affines ont un taux d'accroissement constant (quelles que soient les valeurs de a et b).

Exemple :

Si $f(x) = 3x + 5$, le taux d'accroissement est 3.

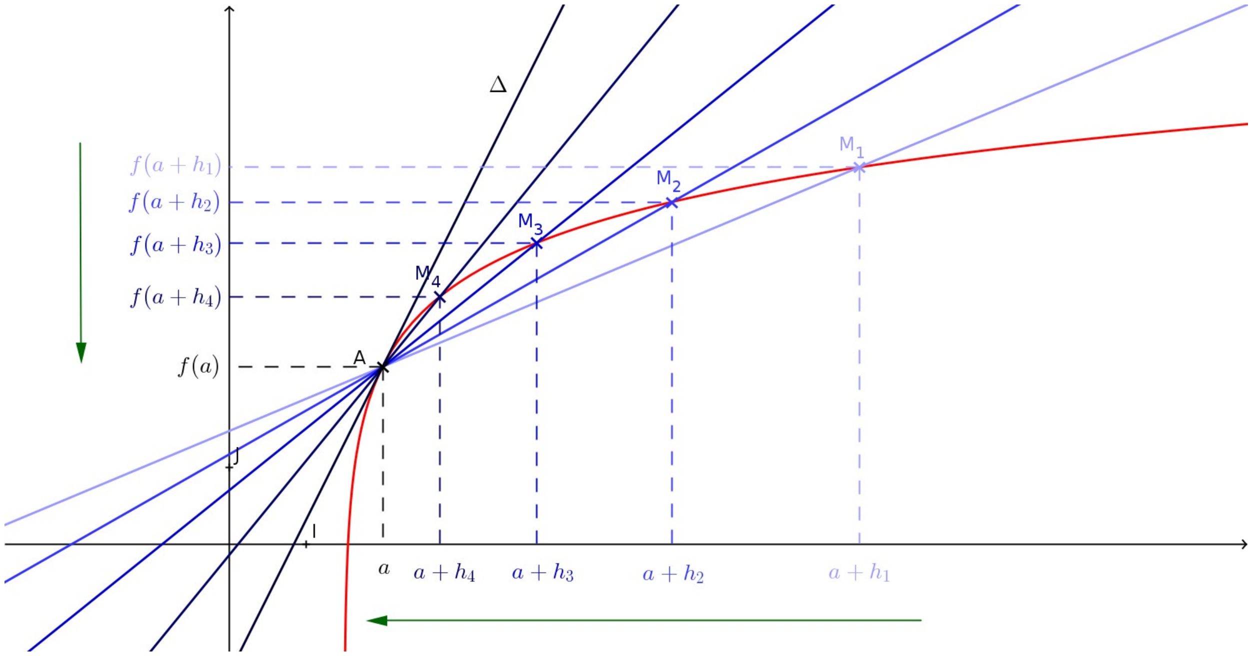
Cela signifie « quand x s'accroît de 1 unité, $f(x)$ accroît de 3 unités ».

2°) Nombre dérivé et dérivabilité :

Définition :

Soient f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique. Soient A$(a\,;f(a))$ et M $(a+h\,;f(a+h))$ deux points de $\mathscr{C}_f$.

Le taux de variation de la fonction f entre a et $a+h$ est $\tau(h)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. C'est aussi le coefficient directeur de la droite (AM).



Remarque :

Plus le point M se rapproche de A, plus la droite (AM) se rapproche de la tangente Δ à $\mathscr{C}_f$ en A, et donc plus ce taux de variation se rapproche du coefficient directeur de Δ.

Définition :

Le coefficient directeur de cette tangente est appelé le nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$. On écrit $f'(a) = \lim_{h\to 0} \tau(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (se lit « limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0).

Lorsque cette limite existe et est finie, on dit que la fonction f est dérivable en a.

Exemple :

Soit f la fonction $x \longmapsto x^2 - x + 2$. Est-elle dérivable en 2 ?

$$\tau(h)=\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{((2+h)^2-(2+h)+2)-(2^2-2+2)}{h}=\frac{4+4h+h^2-2-h+2-4}{h}=\frac{h^2+3h}{h}=h+3\,.$$

Or $\lim_{h\to 0} h+3 = 3$ donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 3$.

II. Tangente à une courbe :

1°) Définition :

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en un réel a de cet intervalle et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

On appelle tangente $\mathscr{C}_f$ en a la droite passant par le point A (a ; $f(a)$) et de coefficient directeur $f'(a)$.

2°) Propriété :

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en un réel a de cet intervalle et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

La tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_f$ au point A (a ; $f(a)$) a pour équation réduite $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Preuve (exemplaire) :

$\mathcal{T}$ admet une équation de la forme $y = mx + p$, où, d'après la définition de la tangente, $m = f'(a)$.

$\mathcal{T}$ admet donc une équation de la forme $y = f'(a)x + p$.

Or, $\mathcal{T}$ passe par A $(a\ ;f(a))$, ce qui signifie $f(a) = f'(a)a + p$, soit $p = f(a) - f'(a)a$.

Ce qui nous donne $\mathcal{T} : y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f'(a)x - f'(a)a + f(a)$ En factorisant par $f'(a)$ on obtient bien $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Exemple :

Reprenons la fonction f précédente : $f : x \longmapsto x^2 - x + 2$. Cherchons une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à sa courbe représentative au point A d'abscisse 2.

D'après la propriété, $\mathcal{T}$ a pour équation $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$. $f(2) = 2^2 - 2 + 2 = 4$ et $f'(2) = 3$ d'après l'exemple précédent.

Donc $\mathcal{T}$ a pour équation $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$ soit $y = 3(x - 2) + 4$

$$y = 3x - 6 + 4$$

$$y = 3x - 2.$$

III. Exemple de non dérivabilité :

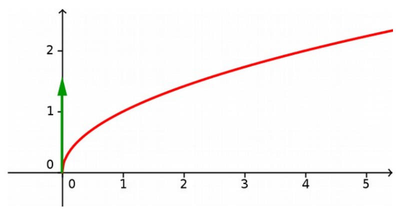
1°) Propriétés :

Propriétés :

La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$, n'est pas dérivable en 0, alors qu'elle est définie sur $[0\ ;+\infty]$.

La fonction $x \longmapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0, alors qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$.

2°) Démonstration :



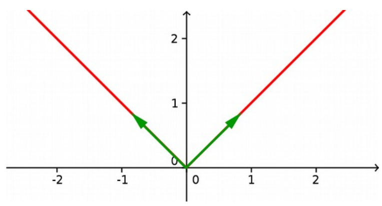
Démonstration pour la fonction racine carrée (exemplaire) :

Le taux de variation de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ entre 0 et $0 + h$ est :

$$\tau(h) = \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Or, lorsque h se rapproche de 0, $\tau(h) = \frac{1}{\sqrt{h}}$ prend des valeur de plus en plus grande. On dit que $\tau(h)$ tends vers $+\infty$ et n'a donc pas de limite finie. La fonction racine carré n'est donc pas dérivable en 0.

2°) Interprétation graphique :



Graphiquement, on peut dire qu'une fonction n'est pas dérivable en un point lorsque sa courbe représentative admet une tangente verticale (cas de la fonction racine carrée en 0) ou un point anguleux (cas de la fonction valeur absolue en 0).