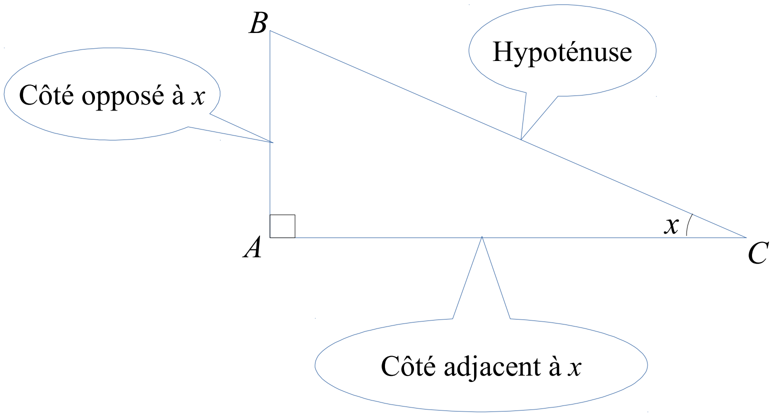
TRIGONOMÉTRIE

Histoire des mathématiques :

L'utilisation la plus ancienne du sinus apparaît dans les *Shulba Sutras* écrits en indien ancien entre le VIII^{ème} siècle et le VI^{ème} siècle.

I. Rappels :



Dans un triangle rectangle, on peut définir les relations suivantes entre les angles aigus et les différentes longueurs des côtés.

$$\cos x = \frac{\text{côté adjacent (à } x\text{)}}{\text{hypoténuse}} \; ; \; \sin x = \frac{\text{côté opposé (à } x\text{)}}{\text{hypoténuse}} \; ; \; \tan x = \frac{\text{côté opposé (à } x\text{)}}{\text{côté adjacent (à } x\text{)}}$$

Le mot SOHCAHTOA (ou CAHSOHTOA) permet de retenir ces trois formules. Chacune des lettres correspond à l'initiale des mots formant cette formule.

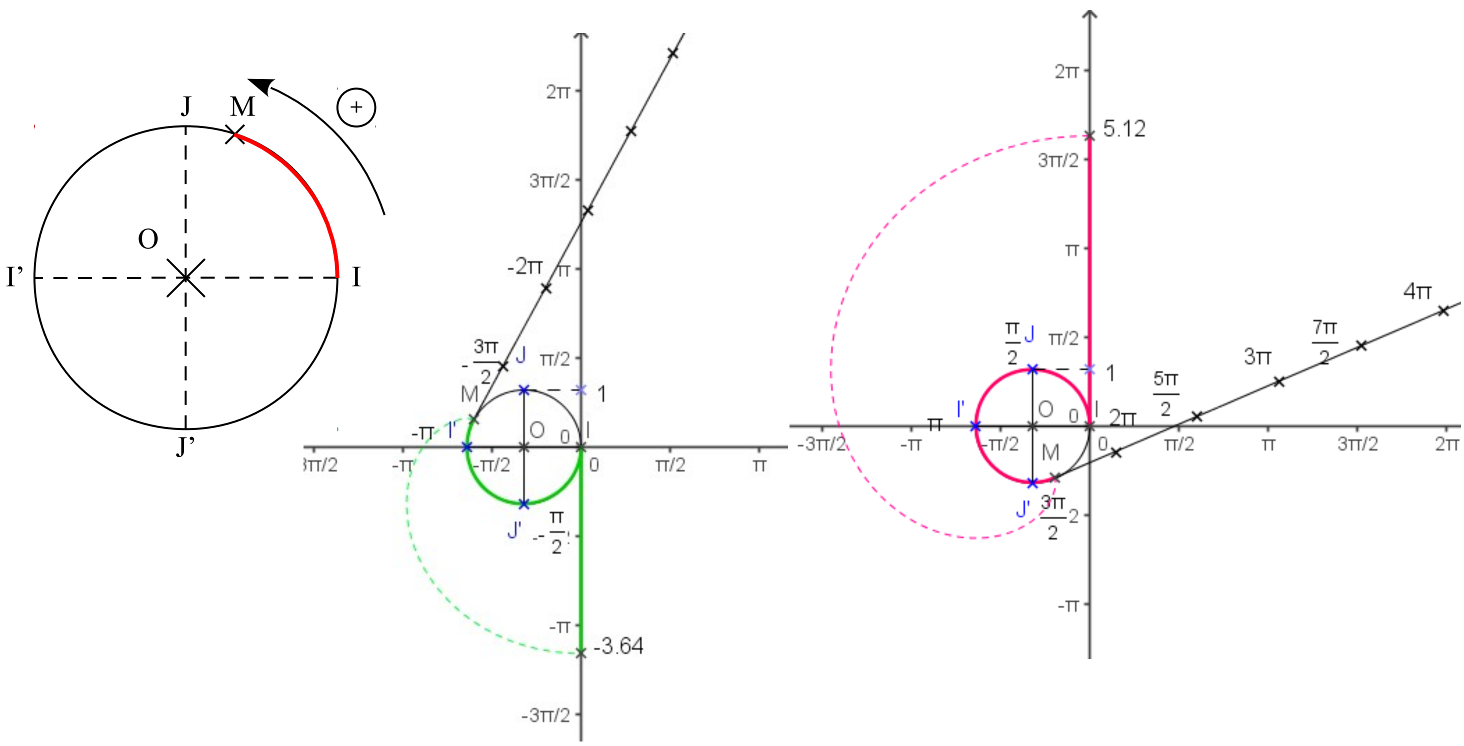
SOHCAHTOA : **S**inus = **O**pposé / **H**ypoténuse ; **C**osinus = **A**djacent / **H**ypoténuse

et **T**angente = **O**pposé / **A**djacent.

II. Le cercle trigonométrique :

1°) Repérage d'un point sur le cercle trigonométrique :

On appelle **cercle trigonométrique** un cercle de rayon 1 muni d'un sens appelé « sens direct » (le sens anti-horaire).



À tout réel x, on peut associer un point M sur le cercle de la façon suivante :

- si $x > 0$, on parcourt la distance x sur le cercle en partant du point I dans le sens direct.
- si $x < 0$, on parcourt la distance x sur le cercle en partant du point I dans le sens indirect.

La longueur de l'arc est alors x si $x > 0$ et $-x$ si $x < 0$ (C'est à dire x sans son signe).

Exemples :

La longueur totale du cercle est : $2 \times \pi \times R = 2 \times \pi \times 1 = 2\pi$.

Le point J est repéré par le nombre : $\frac{1}{4} \times 2\pi = \frac{\pi}{2}$ (un quart de tour dans le sens direct)

Le point J' est repéré par le nombre : $-\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ (un quart de tour dans le sens indirect) ou (trois quarts de tour dans le sens direct)

Remarque :

Tout point peut être repéré par une infinité de nombres. Par exemple A est associé aux nombres 0 (aucun tour), 2π (un tour), 4π (deux tours), -2π …

De manière générale, si le point A est repéré par le réel α, alors il est aussi repéré par tout réel de la forme $\alpha + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. On peut voir k comme le nombre de tours de cercle (dans le sens positif ou dans le sens négatif) entre α et le réel $\alpha + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Exemples :

Angles …………………… **Longueur de l'arc**

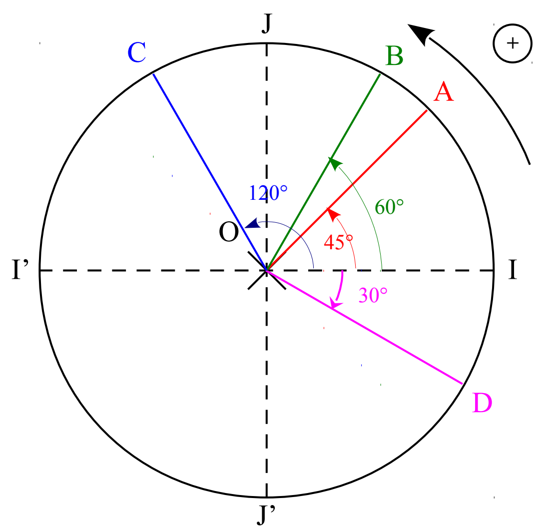
$\widehat{IOA} = 45° = \frac{1}{8}$ de tour …………………… $\frac{1}{8} \times 2\pi = \frac{\pi}{4}$.

$\widehat{IOB} = 60° = \frac{1}{6}$ de tour …………………… $\frac{1}{6} \times 2\pi = \frac{\pi}{3}$.

$\widehat{IOC} = 120° = \frac{1}{3}$ de tour …………………… $\frac{1}{3} \times 2\pi = \frac{2\pi}{3}$.

$\widehat{IOD} = 30° = \frac{1}{12}$ de tour (sens indirect) … $-\frac{1}{12} \times 2\pi = -\frac{\pi}{6}$.

$\widehat{IOI'} = 180°$ = un demi-tour ……………… π



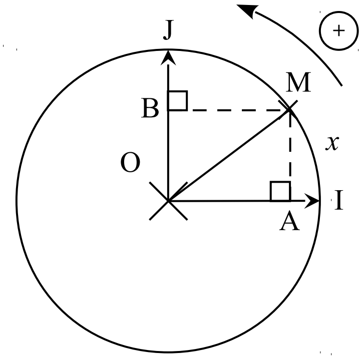
Remarque :

Les longueurs d'arc et les mesures d'angles sont proportionnelles.

En règle générale :

$$\frac{\textbf{longueur d'arc}}{\pi} = \frac{\textbf{mesure en degré}}{\textbf{180}}$$

2°) Cosinus et sinus :



On munit le cercle trigonométrique d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit x la longueur de l'arc $\widehat{IM}$.

Dans le triangle rectangle OAM, on a :

$\cos x = \dfrac{OA}{OM}$

$\cos x = \dfrac{OA}{1}$ (le cercle a pour rayon 1)

$\cos x = OA$

donc **cos *x* est l'abscisse de M**.

De même

$\sin x = \dfrac{OB}{OM}$

$\sin x = \dfrac{OB}{1}$ (le cercle a pour rayon 1)

$\sin x = MA = OB$

donc **sin *x* est l'ordonnée de M**.

Conclusion :

Si M est le point associé au réel x sur le cercle trigonométrique, alors **M (cos *x* ; sin *x*)**.

Remarques :

- Pour tout x, on a $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$;
- Dans le triangle OAM rectangle en A on a OM = 1, OA = cos x et AM = sin x, alors d'après le théorème de Pythagore $OA^2 + AM^2 = OM^2$ et donc : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (on rappelle que $\cos^2 x$ est une notation qui signifie $(\cos x)^2$) ;
- De plus on rappelle que pour tout x, on a $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Quelques valeurs remarquables :

Angle	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
Réel x	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos *x*	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin *x*	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1