POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ 2

Un peu d'histoire :

On trouve chez Diophante, puis chez Al-Khwârizmî, des méthodes de résolutions d'équations du second degré. Le travail novateur d'Al-Khwârizmî reste en partie tributaire de la tradition (utilisation de considérations géométriques équivalentes à la forme canonique) et de l'état alors embryonnaire de la notation algébrique, ainsi que de l'absence des nombres négatifs. Les méthodes actuelles sont un aboutissement de ce long cheminement vers un formalisme efficace et concis.

I. Détermination de la forme canonique du trinôme :

Propriété :

Toute fonction polynôme f de degré deux, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, peut s'écrire de façon unique sous la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, où α et β sont deux réels. Cette forme est appelée la forme canonique du trinôme.

Preuve :

Le principe est de transformer le trinôme pour que la variable x n'apparaisse qu'une seule fois.

- transformation de l'écriture $ax^2 + bx + c$:

On met a en facteur (possible car $a \neq 0$) : $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

Or $x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$

D'où $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$

Pour simplifier cette écriture, posons $\Delta = b^2 - 4ac$. Δ s'appelle le **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

On a ainsi : $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$

Cette dernière expression, de la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$, où $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = \frac{-\Delta}{4a}$ est la **forme canonique** du trinôme.

Exemple :

"Canonisons" le trinôme $x^2 - 7x + 12$. Cela donne $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + 12 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

Remarque :

On peut également procéder par identification pour déterminer une forme canonique : on développe la forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, puis on identifie les coefficients de la forme obtenue avec ceux de la forme développée qu'on avait au départ.

II. Résolution de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$:

Propriété :

Soit l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

Si $\Delta < 0$: l'équation n'a pas de solution réelle.

Si $\Delta = 0$: l'équation a une seule solution $x_0 = \frac{-b}{2a}$. On dit que cette solution est double.

Si $\Delta > 0$: l'équation possède alors 2 solutions réelles : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Démonstration (exemplaire) :

D'après la démonstration du ***I.***, résoudre $ax^2 + bx + c = 0$ revient à résoudre l'équation :

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right) = 0 \text{ qui s'écrit encore :}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2} \qquad \text{(E)}$$

Dans cette dernière égalité, le membre de gauche est positif, $4a^2$ aussi.

Si $\Delta < 0$, l'égalité ne peut être vraie, l'équation n'a donc pas de solution réelle.

Si $\Delta = 0$, le membre de droite est nul, le membre de gauche doit donc aussi être nul. L'équation a une seule solution $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

Si $\Delta > 0$: l'équation (E) est factorisable : $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$.

L'équation possède bien 2 solutions réelles : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Remarque :

- Les formules obtenues pour $\Delta > 0$ s'étendent à $\Delta = 0$.
- Attention ! Le calcul de Δ est inutile pour des trinômes « incomplets » tels que : $x^2 - 2x = 0$; $x^2 - 5 = 0$ etc...

Exemples :

- $x^2 - 4x + 4 = 0$; $\Delta = 0$; l'équation a une seule solution : $x_0 = \frac{-b}{2a} = 2$.
- $5x^2 + 6x + 2 = 0$; $\Delta = -4$; pas de racine réelle.
- $3x^2 - x - 4 = 0$; $\Delta = 49$; l'équation a donc deux solutions : $x_1=\frac{1-7}{6}=-1$ et $x_2=\frac{1+7}{6}=\frac{4}{3}$.

Exemples avec des trinômes incomplets (pour lesquels on n'utilisera donc pas le discriminant Δ) :

- Cas où $c = 0$:

$x^2 - 2x = 0$; le trinôme est incomplet ($c = 0$), inutile d'utiliser Δ : $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0$

L'équation a donc deux solutions : 0 et 2.

- Cas où $b = 0$:

$x^2 - 5 = 0$; le trinôme est incomplet ($b = 0$), inutile d'utiliser Δ : $x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5$.

L'équation a donc deux solutions : $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$.

III. Variations et représentation graphique :

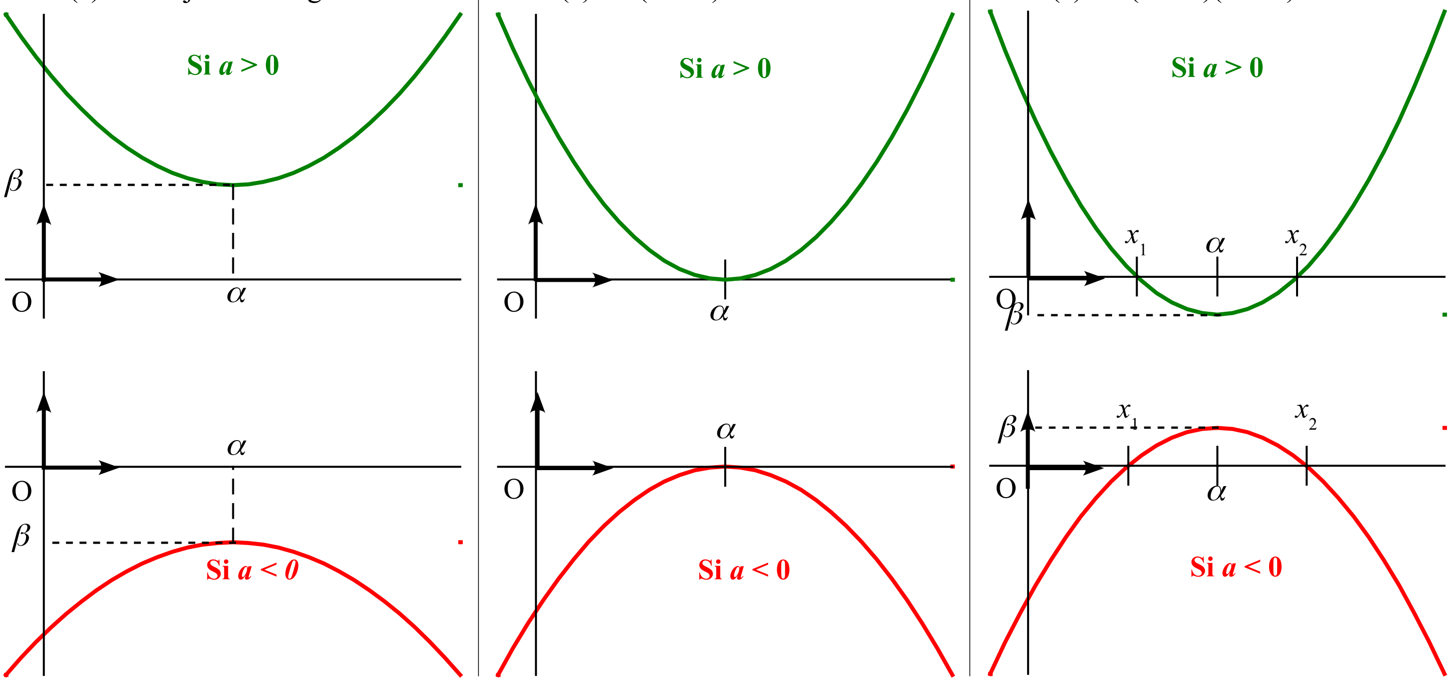
On considère le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et sa forme canonique :

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

Si $\Delta < 0$
→ $P(x)$ est toujours du signe de a

$\Delta = 0$
→ $P(x) = a(x - x_0)^2$

Si $\Delta > 0$
→ $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$



Propriété :

Le sommet S de la parabole $\mathscr{P}$ a pour coordonnées S (α ; β). La droite d'équation $x = \alpha$ est un axe de symétrie de $\mathscr{P}$.

Remarque :

Ce qui précède nous permet également d'établir les tableaux de variations suivants :

$a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P(x)$	$-\infty$	↘	β	↗	$+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P(x)$	$-\infty$	↗	β	↘	$-\infty$

Exemple :

Donner le tableau de variations de f définie par $f(x) = -x^2 + 2x + 4$.

Calculons les coordonnées du sommet : $a = -1$; $b = 2$ et $c = 4$.

$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{-2} = 1$ et $\beta = f(1) = -1\times 1^2 + 2\times 1 + 4 = 5$

Donc le sommet est S (1 ; 5). De plus comme $a = -1 < 0$, nous pouvons dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$P(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	$-\infty$

IV. Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$:

Théorème :

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$. Le trinôme se factorise ainsi :

- Si $\Delta > 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme
- Si $\Delta = 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$

Remarque :

Lorsque $\Delta < 0$, comme le trinôme n'a pas de racine réelle, il faut abandonner l'espoir de pouvoir le factoriser (sur $\mathbb{R}$ …).

Exemple :

On considère le polynôme $P(x) = 2x^2 - 3x - 9$, qu'on souhaite factoriser.

→ On résout l'équation $2x^2 - 3x - 9 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-9) = 9 + 72 = 81$ donc $\sqrt{\Delta} = 9$

donc $P(x) = 0$ admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{3-9}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3+9}{4}$$

$$x_1 = -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = 3$$

P peut donc s'écrire $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ donc $P(x) = 2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-3)$.

V. Signe du trinôme :

Théorème :

On considère le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ et son discriminant Δ.

- Si $\Delta < 0$, $P(x)$ est toujours du signe de a
- Si $\Delta = 0$, alors $P(x)$ est $\begin{cases} \text{du signe de } a \text{ si } x \neq x_0 \\ = 0 \text{ si } x = x_0 \end{cases}$, où x_0 est la racine du polynôme.
- Si $\Delta > 0$, alors le signe de $P(x)$ est défini par le tableau de signes suivant (où x_1 et x_2 sont les racines de P en choisissant $x_1 < x_2$) :

x	$-\infty$ x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	Signe de $-a$	Signe de a

Autrement dit, un polynôme est : - du signe de $-a$ entre ses deux racines

- du signe de a ailleurs

Preuve (Pour $\Delta > 0$) :

x	$-\infty$ x_1	x_2	$+\infty$
$x - x_1$	$-$	$+$	$+$
$x - x_2$	$-$	$-$	$+$
$(x - x_1)(x - x_2)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Signe de a	Signe de $-a$	Signe de a

Exemple :

Soit le polynôme $P(x) = 2x^2 - 3x - 9$.

Donc, puisque $a > 0$: $P(x) > 0$ sur $]-\infty\ ;\ -\frac{3}{2}[\ \cup\ ]3\ ;\ +\infty[$

$P(x) = 0$ si $x = -\frac{3}{2}$ ou $x = 3$

$P(x) < 0$ sur $]-\frac{3}{2}\ ;\ 3[$