GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES

Histoire des mathématiques :

Bien avant de faire l'objet d'une étude formalisée, les suites apparaissent dans deux types de situations :
- approximation de nombres réels (encadrement de π par Archimède, calcul de la racine carrée chez Héron d'Alexandrie) ;
- problèmes de comptage (les lapins de Fibonacci...).

Les problèmes décrits dans les livres de Fibonacci, ou chez les savants arabes qui le précèdent, se modélisent avec des suites. Oresme calcule des sommes de termes de suites géométriques au XIVe siècle (les suites géométriques seront étudiées au chapitre 9)

I. Généralité :

1°) Définition :

Définition :

Une suite numérique est une fonction associant à tout nombre entier naturel n, un nombre réel $u(n)$:

$$u : \quad \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto u(n)$$

Ce nombre $u(n)$ est aussi noté u_n. La suite se note (u_n) ou $(u(n))$ ou simplement u. Dans la suite du cours, nous utiliserons indifféremment l'une ou l'autre de ces notations.

Exemple :

Soit la suite définie par $u(n) = 2n - 10$.

$u_0 = u(0) = -10$; $u_1 = u(1) = -8$; $u_2 = u(2) = -6$; $u_3 = u(3) = -4$; $u_{10} = u(10) = 10$

Remarques :

- Le 1er terme de la suite est u_0, l'indice est 0, et u_{10} est le terme d'indice 10, et c'est le 11ème terme de la suite.
- La suite $(v(n))$ (notée aussi (v_n) ou v) définie par $v(n) = \sqrt{n-3}$ n'est définie que pour $n \geqslant 3$. On la note $(v(n))_{n\geqslant 3}$ (ou $(v_n)_{n\geqslant 3}$).

2°) Suite définie par son terme général :

Définition :

Une suite est définie par son terme général, (ou de façon explicite) lorsque le terme $u(n)$ est exprimé en fonction de n (à la manière des fonctions, $u(n) = u_n = f(n)$).

Exemples :

La suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$. La suite (v_n) définie par $v_n = 0{,}5n^2 + 1$.

Remarque :

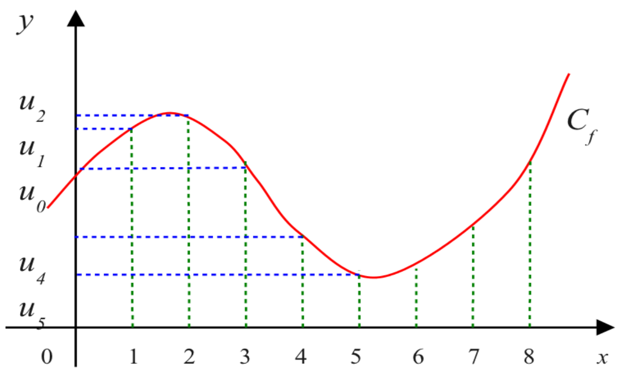
Lorsqu'une suite est définie par son terme général, on peut calculer n'importe lequel de ses termes en connaissant son rang.

Représentation graphique :

Soit f une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$.

On définit une suite (u_n) en posant, pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$.

On dispose, à partir de la courbe représentative de la fonction f, d'une représentation graphique de la suite (u_n). Sur l'axe des ordonnées, on peut lire les termes u_0, u_1, u_2, ...



3°) Suite définie par récurrence :

Définition :

Une suite est définie par récurrence lorsque l'on donne son premier terme et la relation qui relie un terme $u\,(n)$ à son suivant $u\,(n+1)$.

Exemples :

- La suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2\,u_n + 1 \end{cases}$. On a alors $u_1 = 3$; $u_2 = 7$; $u_3 = 15$ (...)

- Voir vidéo capacité 1 p 141

Remarque :

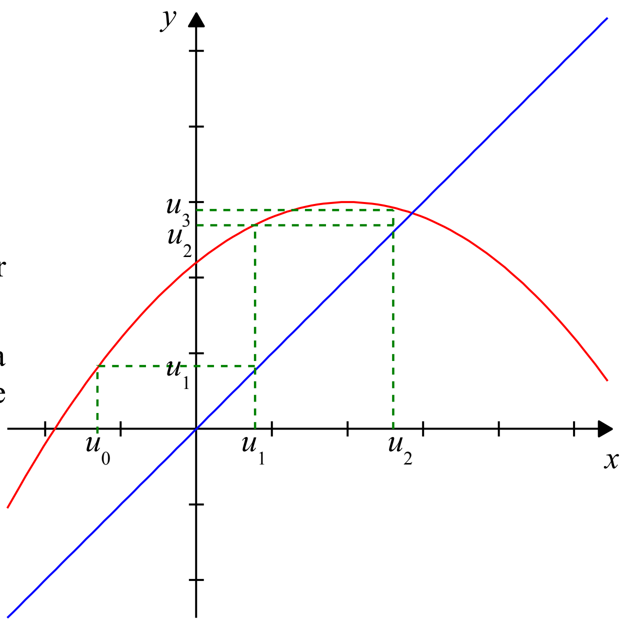
Lorsqu'une suite est définie par récurrence, on ne peut calculer un terme qu'en connaissant son précédent.

Représentation graphique :

Soit f une fonction définie sur ℝ.

On définit une suite (u_n) en donnant son premier terme u_0, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f\,(u_n)$.

On dispose, à partir de la courbe représentative de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$, d'une représentation graphique de la suite (u_n).



II. Sens de variation d'une suite numérique :

1°) Définitions :

Définition :

Une suite (u_n) est croissante si, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$:

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \ldots$$

Une suite (u_n) est décroissante si, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_{n+1}$:

$$u_0 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \geqslant \ldots \geqslant u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \ldots$$

Remarques :

On peut aussi dire qu'une suite est croissante ou décroissante à partir d'un certain rang si les premiers termes ne vérifient pas les inégalités requises.

Si pour tout entier naturel n, $u_n = u_{n+1}$, on dit que la suite est constante.

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n$. La suite (u_n) est croissante.

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (n-3)^2$. On obtient $u_0 = 9$; $u_1 = 4$; $u_2 = 1$; $u_3 = 0$; $u_4 = 1$; $u_5 = 4$; $u_6 = 9$; $u_7 = 16$; $u_8 = 25$ … La suite (u_n) est croissante à partir du rang 3 (il faudrait le démontrer).

2°) Étude du sens de variation :

Pour étudier le sens de variation d'une suite, on peut :

- méthode 1 : étudier le signe $u_{n+1} - u_n$;
- méthode 2 : si $u_n = f(n)$, étudier le sens de variation de la fonction f sur $[0\ ;+\infty[$;
- méthode 3 : si (u_n) est une suite dont tous les termes sont strictement positifs, comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Exemple (voir aussi vidéo capacité 2 p 143):

Étudier la monotonie des suites suivantes :

a) $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = -3 + \dfrac{2}{n}$.

b) (v_n) définie par $v_{n+1} = v_n + 4n + 3$ et $v_0 = 2$.

c) (w_n) définie par pour tout entier $\mathbb{N} \geqslant 1$ $w_n = \dfrac{2^n}{n}$.

a) Méthode 2 : on a bien une suite définie par $u_n = f(n)$ avec $f(x) = -3 + \dfrac{2}{x}$.

On étudie les variations de f sur $]0\ ;+\infty[$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0\ ;+\infty[$ donc f est strictement décroissante sur $]0\ ;+\infty[$, ainsi (u_n) est strictement décroissante.

b) Méthode 1 : $v_{n+1} - v_n = 4n + 3$

or $n \in \mathbb{N}$ donc $4n + 3 \geqslant 0$ donc $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$ i.e. $v_{n+1} \geqslant v_n$.

donc la suite (v_n) est croissante.

c) Méthode 3 : les termes sont strictement positifs. On calcule $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ldots = \dfrac{2n}{n+1}$.

On compare à 1 : $\dfrac{2n}{n+1} \geqslant 1 \Leftrightarrow 2n \geqslant n + 1 \Leftrightarrow n \geqslant 1$. Ainsi $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.

Donc pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} \geqslant u_n$ puisque $u_n \geqslant 0$, donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

III. Notion de limite d'une suite :

Le but est de regarder comment se comportent les termes u_n d'une suite (u_n) lorsque n devient très grand. Cette année, nous formulerons essentiellement des conjectures à partir de tableaux ou graphiques.

Exemple :

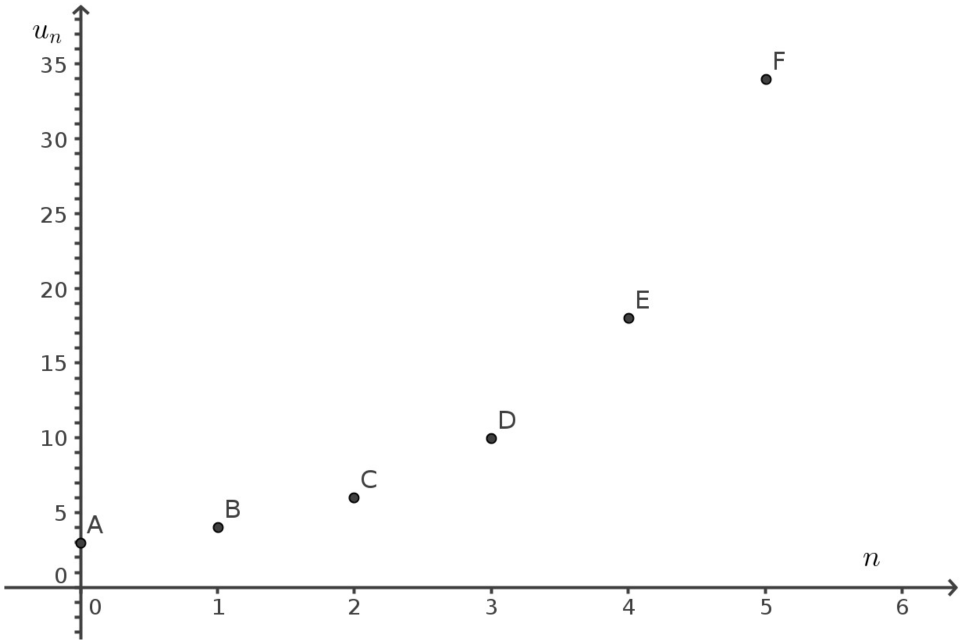
Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{3n-2}{n+5}$. Calculons les premiers termes de cette suite :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
u_n	3,5	3,33333	3,25	3,2	3,16666	3,14285	3,125	3,11111	3,1	3,09090	3,08333	3,07692	3,07142	3,06666	3,0625	3,05882	3,05555	3,05263	3,05	3,04761	3,04545

Il semble que la limite de cette suite soit 3. On dit que (u_n) tend vers 3 (quand n tend vers l'infini) et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$ ou $\lim (u_n) = 3$.

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=2\,u_n-2 \end{cases}$. Représentons les premiers termes de cette suite :



Il semble que la limite de cette suite soit $+\infty$. On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ (quand n tend vers l'infini) et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim (u_n) = +\infty$.

Vocabulaire :

On dit qu'une suite est **convergente** quand elle tend vers un nombre fini.

On dit qu'une suite est **divergente** quand elle n'est pas convergente. C'est le cas des suites qui ont une limite infinie et de celles qui n'ont pas de limite (comme $(-1)^n$).

IV. Modéliser à l'aide d'une suite :

Voir vidéo capacité 6 p 150