PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET INDÉPENDANCE

Histoire des mathématiques :

Les probabilités conditionnelles peuvent être l'objet d'un travail historique en anglais ; elles apparaissent en effet dans des travaux de Bayes et de Moivre, écrits en anglais au XVIII^{e} siècle, même si c'est Laplace qui en a élaboré la notion. Les questions traitées par ces auteurs peuvent parfois surprendre (exemple : quelle est la probabilité que le soleil se lève demain, sachant qu'il s'est levé depuis le commencement du monde ?) ; néanmoins, les probabilités conditionnelles sont omniprésentes dans la vie courante et leur utilisation inappropriée mène facilement à de fausses affirmations.

I. Rappels :

Voir votre cours de seconde. Vous devez savoir ce qu'est une expérience aléatoire, une issue, un événement (élémentaire, contraire, événements incompatibles (plus en 2020), union, intersection d'événements). Probabilité : définition, équiprobabilité, probabilité des événements cités ci-avant.

II. Probabilités conditionnelles :

1°) Définition :

Définition :

Soit A un événement de l'univers Ω muni de la loi P et tel que P(A) ≠ 0.

On définit sur Ω une nouvelle loi de probabilité notée P_A en posant pour tout événement B :

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

P_A est appelée probabilité conditionnelle sachant que A est réalisé. P_A (B) se lit P de B sachant A.

Remarque :

Comme $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$, on a aussi $P(A\cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

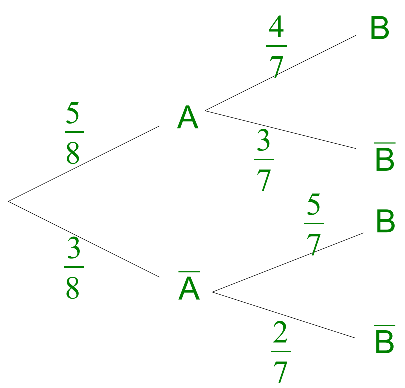
La réalisation de $A \cap B$ s'obtient en réalisant A, puis B sachant que A est réalisé.

Exemple 1 (à l'aide d'un arbre) : (ou voir la vidéo capacité 1 p 311)

Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire au hasard et sans remise deux boules. Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?

Considérons les événements A : « la première boule est rouge » et B : « la deuxième boule est rouge ».

On peut représenter la situation à l'aide de cet arbre pondéré. À chaque étape, les issues n'ont pas toutes la même probabilité de se réaliser, et on note sur chaque branche de l'arbre la probabilité que l'issue se trouvant à son extrémité se réalise.



On a $P(A) = \frac{5}{8}$ (5 boules rouges parmi 8) et $P_A(B) = \frac{4}{7}$ (après le tirage de la première boule rouge, il reste 4 boules rouges parmi 7).

Tirer deux boules rouges correspond à l'événement $A \cap B$. Calculer $P(A \cap B)$.

$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Ainsi, $P(A \cap B) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$.

Exemple 2 (à l'aide d'un tableau) :

Considérons le tableau suivant récapitulant les résultats d'un test effectué sur 1000 personnes par un laboratoire souhaitant éprouver l'efficacité de son nouveau test de dépistage d'une maladie. Nommons T l'événement « le test est positif » et M l'événement l'individu est malade.

	T	$\overline{\mathbf{T}}$	**Total**
M	149	1	**150**
$\overline{\mathbf{M}}$	4	846	**850**
Total	**153**	**847**	**1000**

Le laboratoire souhaiterait connaître la probabilité que le test soit un faut positif, c'est-à-dire que le test soit positif alors que l'individu n'est pas malade.

Ce que l'on cherche donc, c'est $P_{\overline{M}}(T)$. Or, $P_{\overline{M}}(T) = \frac{P(\overline{M} \cap T)}{P(\overline{M})}$.

D'après le tableau, $P(\overline{M} \cap T) = \frac{4}{1000}$ et $P(\overline{M}) = \frac{850}{1000}$.

Donc $P_{\overline{M}}(T) = \frac{\frac{4}{1000}}{\frac{850}{1000}} = \frac{4}{850} \approx 0{,}0047 = 0{,}47\ \%$.

2°) Formule de probabilité totale :

Définition :

Les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de l'univers Ω lorsque leur réunion donne Ω et qu'ils sont deux à deux incompatibles, c'est-à-dire $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ et $Ai \cap Aj = \varnothing$ pour tous $(i\ ;\ j) \in [\![1\ ;\ n]\!]^2$.

Propriété :

Deux événements contraires forment une partition de l'univers.

Preuve :

Si A est un événement et $\overline{A}$ son événement contraire. On a bien $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$.

Propriété :

On considère des événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ formant une partition de l'univers Ω.

Alors pour tout événement B, $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$, avec pour tout i pris entre 1 et n, $P(A_i \cap B) = P(A_i) \times P_{A_i}(B)$.

Exemple : (ou voir la vidéo capacité 2 p 313)

Une urne U_1 contient 1 boule rouge et 5 boules vertes, une urne U_2 contient 3 boules rouges et une boule verte, une urne U_3 contient 1 boule rouge et 2 boules vertes.

On choisit l'une des urnes au hasard et on tire une boule de cette urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?

Appelons U_1 , U_2 et U_3 les événements correspondants au choix de l'urne. Ils forment une partition de l'univers et on a $P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \frac{1}{3}$.

Soit R l'événement « tirer une boule rouge ». La formule des probabilités totales nous donne

$P(R) = P(U_1 \cap R) + P(U_2 \cap R) + P(U_3 \cap R)$,

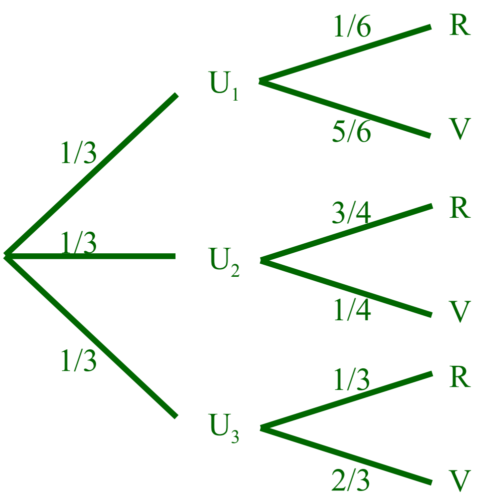
Donc $P(R)=P(U_1)\times P_{U_1}(R)+P(U_2)\times P_{U_2}(R)+P(U_3)\times P_{U_3}(R)$.

Or $P_{U_1}(R)=\frac{1}{6}$; $P_{U_2}(R)=\frac{3}{4}$; $P_{U_3}(R)=\frac{1}{3}$.

On a donc $P(R) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{5}{12}$.

Exemple :

On peut retrouver ce résultat en utilisant un arbre de probabilités :



On applique les règles suivantes :

• On a une probabilité sur la première branche, puis des probabilités conditionnelles sur les branches suivantes.

• Tous les chemins partant d'un événement forment une partition de cette événement.

• La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités marquées sur ses branches.

• La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui mènent à cet événement.

Ainsi une simple lecture de l'arbre nous donne le résultat $P(R) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{5}{12}$.

Attention :

Ne pas confondre P (R) et $P_{U_1}(R)$ par exemple. P (R) n'est pas directement écrit dans l'arbre, il faut le calculer à l'aide de la formule des probabilités totales. Hormis sur ses premières branches (les plus à gauche), ce sont **toujours des probabilités conditionnelles qui apparaissent dans un arbre**.

Attention 2 : (voir aussi vidéo capacité 5 p 317)

Ne pas confondre $P_A(B)$ et $P_B(A)$. L'événement dont on cherche la rpobabilité est toujours entre les parenthèses.

III. Indépendance :

1°) Événements indépendants :

Définition :

On dit que deux événements A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Propriété :

Cela équivaut à dire que si $P(A) \neq 0$, $P_A(B) = P(B)$.

Preuve :

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)\times P(B)}{P(A)} = P(B).$$

Remarque :

Il est naturel de dire que A et B sont indépendants si la probabilité de B est la même que la probabilité de B sachant A, autrement dit que la probabilité que B se réalise est la même que A se réalise ou non.

Exemple : (Ou voir la vidéo capacité 3 p 315)

On fait l'hypothèse que chacun des moteurs d'un avion bimoteur tombe en panne avec une probabilité égale à 0,0001 et ceci de façon indépendante de l'autre moteur. Quelle est la probabilité que l'avion arrive à bon port sachant qu'il peut voler avec un seul moteur ?

Soient A l'événement « le premier moteur tombe en panne » et B l'événement « le second moteur tombe en panne ».

Alors $A \cap B$ est l'événement « les deux moteurs tombent en panne ».

Comme A et B sont indépendants, on a $P(A\cap B) = P(A) \times P(B) = 10^{-8}$. L'événement contraire, $\overline{A\cap B}$, signifie qu'au moins l'un des moteurs n'est pas tombé en panne, donc que l'avion arrive à bon port.

On a $P\left(\overline{A\cap B}\right) = 1 - 10^{-8}$.

Exemple 2 :

Étudier l'indépendance de deux événements : voir vidéo capacité 4 p 316.

2°) Répétition de deux épreuves indépendantes :

Propriété :

Répéter deux épreuves indépendantes peut être assimilé à un tirage avec remise. Le résultat de la première épreuve n'influence pas le résultat de la deuxième.

Remarque :

On peut représenter ces situations à l'aide d'un arbre ou d'un tableau.

Exemple :

On lance une pièce équilibrée deux fois et on relève la face obtenue à chaque fois. Il s'agit bien ici de la répétition de deux épreuves indépendantes, le résultat du premier lancer n'influençant pas celui du deuxième. Nous pouvons représenter cette situation soit par un arbre, soit par un tableau :

		1er lancer	
		P	**F**
2ème lancer	**P**	(P ; P)	(F ; P)
	F	(P ; F)	(F ; F)