POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ 1

I. Premiers éléments :

1°) Définition :

Définition :

On appelle fonction **polynôme du second degré** toute fonction P, définie sur $\mathbb{R}$, pouvant se ramener à la forme :

$\boldsymbol{P(x) = ax^2 + bx + c}$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

L'expression $ax^2 + bx + c$ est encore appelée trinôme du second degré et chacun des termes $a_n x^n$ est appelé monôme de degré n.

Exemples :

$x^2 - 7x + 12$ $\quad (a = 1 ; b = -7 ; c = 12)$

$5x^2 + 1$ $\quad (a = 5 ; b = 0 ; c = 1)$

$4x^2$ $\quad (a = 4 ; b = 0 ; c = 0)$

$(x + 1)(x + 2)$ peut s'écrire $x^2 + 3x + 2$

Contre-exemples :

$2x + 1$ est un binôme du premier degré

$6x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ est une expression du 3ème degré

$(x - 1)^2 - x^2$ est du premier degré (il suffit de développer pour le constater).

Propriété :

Si deux fonctions polynômes du second degré P et Q sont égales (sur $\mathbb{R}$), alors leurs coefficients sont égaux.

Preuve :

Notons $P(x) = ax^2 + bx + c$ et $Q(x) = a'x^2 + b'x + c'$.

Dire que les fonctions P et Q sont égales sur $\mathbb{R}$ signifie que **pour tout réel x**, on a :

$$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c' \quad (S)$$

En particulier, avec $x = 0$, on obtient immédiatement $c = c'$.

L'égalité (S) devient alors : $ax^2 + bx = a'x^2 + b'x$

En particulier, avec $x = 1$ puis avec $x = -1$, on obtient respectivement :

$$a + b = a' + b' \text{ et } a - b = a' - b'$$

En ajoutant, puis en soustrayant, membre à membre ces deux égalités, on obtient : $2a = 2a'$ et $2b = 2b'$.

On a donc finalement :

$$a = a' ; b = b' \text{ et } c = c'$$

Les coefficients de P et Q sont donc bien égaux.

2°) Différentes formes :

Propriété : (admise)

On vient de voir qu'un polynôme du second degré pouvait s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c trois réels et $a \neq 0$. Cette forme s'appelle la *forme développée*. Il existe d'autres formes, parmi lesquelles :

Forme canonique : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec a, α et β trois réels et $a \neq 0$.

Forme factorisée : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec a, x_1 et x_2 trois réels et $a \neq 0$.

Remarque :

La forme factorisée n'existe pas toujours.

Exemple :

La fonction $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ (forme développée avec $a = 2$; $b = 4$ et $c = -6$) peut également s'écrire

$f(x) = 2(x - 1)(x + 3)$ (forme factorisée avec $a = 2$; $x_1 = 1$ et $x_2 = -3$) ou encore

$f(x) = 2(x + 1)^2 - 8$ (forme canonique avec $a = 2$; $\alpha = -1$ et $\beta = -8$)

Remarque :

Quelle que soit la forme, a vaut toujours la même chose. Dans l'exemple précédent, $a = 2$.

Pour démontrer que ces trois formes sont égales, il suffit de développer les formes factorisée et canonique pour constater que l'on retrouve bien la forme développée.

3°) Représentation graphique :

Propriétés :

- La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une parabole.
- Elle a son ouverture vers le haut (c'est à dire qu'elle est décroissante puis croissante) si $a > 0$ et vers le bas (c'est à dire qu'elle est croissante puis décroissante) si $a < 0$.
- Le minimum (si $a > 0$) ou le maximum (si $a < 0$) de la fonction est β et est atteint lorsque $x = \alpha$. C'est-à-dire que les coordonnées du sommet S sont S(α ; β).
- Dans un repère orthogonal cette parabole possède un axe de symétrie verticale (parallèle à l'axe des ordonnées) qui a pour équation $x = \alpha$.

Preuve (pour les extremums):

Supposons que $a > 0$ et prenons la forme canonique : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Commençons par chercher la valeur de x pour laquelle $f(x)$ est la plus petite possible. a et β sont des constantes, il faut donc trouver la valeur de x pour que $(x - \alpha)^2$ soit le plus petit possible. Or, c'est un carré, sa plus petite valeur est donc 0, lorsque $x = \alpha$. Le minimum est donc atteint lorsque $x = \alpha$, et vaut $f(\alpha) = a(\alpha - \alpha)^2 + \beta = \beta$.

Un raisonnement identique (en cherchant $f(x)$ le plus grand possible) nous prouve que le maximum est aussi atteint quand $x = \alpha$ pour $a < 0$, et vaut β.

Conséquence :

On peut établir le tableau de variation d'une fonction polynôme de degré deux en fonction du signe de a :

Si $a > 0$:

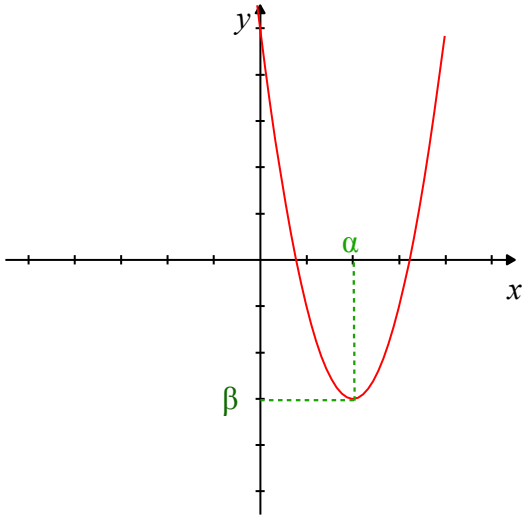
x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		↘	β	↗	

Si $a < 0$:

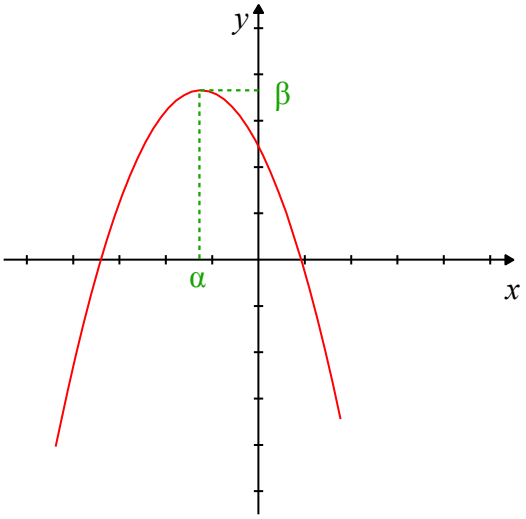
x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		↗	β	↘	

On peut également donner l'allure de la courbe :

Si $a > 0$



Si $a < 0$



Propriété :

Si l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions, l'abscisse du sommet de la parabole est la moyenne de ces deux solutions.

Preuve :

Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersections entre la parabole et la droite parallèle à l'axe des abscisses (horizontale) d'équation $y = k$. Ces deux points sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = \alpha$, qui est l'axe de symétrie de la parabole.

Exemple :

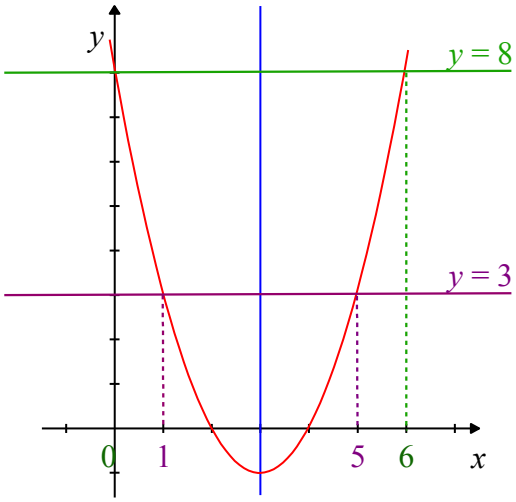
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$. Le sommet de la parabole S a pour coordonnées S(3 ; –1). La droite d'équation $x = 3$ est l'axe de symétrie de la parabole.

Les solutions de $f(x) = 8$ sont 0 et 6. $\frac{0+6}{2} = 3$.

Les solutions de $f(x) = 0$ sont 2 et 4. $\frac{2+4}{2} = 3$.

Les solutions de $f(x) = 3$ sont 1 et 5. Là encore $\frac{1+5}{2} = 3$.

On retrouve bien dans chacun des cas l'abscisse de S.



Remarque :

Si l'on veut calculer l'ordonnée de S, il suffit de calculer l'image de son abscisse.

Exemple :

Dans notre exemple précédent, $f(3) = -1$.

4°) Racine :

Définition :

On appelle racine du trinôme toute valeur de la variable x solution de l'équation du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$. Ce sont les valeurs qui annulent le trinôme, autrement dit, si $f(x) = ax^2 + bx + c$, une racine de f est une solution de $f(x) = 0$.

Exemple :

3 est une racine du trinôme $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$. En effet, $f(3) = 2 \times 3^2 - 4 \times 3 - 6 = 18 - 12 - 6 = 0$.

II. Factorisation d'un trinôme du second degré :

1°) Avec une racine connue :

Propriété :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

Si x_1 est une racine de f, alors f peut se factoriser par $x - x_1$, c'est-à-dire que f peut s'écrire sous la forme $f(x) = (x - x_1)(ax - d)$, où d est un réel (a est le même que dans la forme développée).

Exemple : (voir aussi vidéo capacité 2 p 13). ou ici.

Nous avons vu dans l'exemple précédent que 3 est une racine de $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$, nous pouvons donc factoriser f sous la forme $f(x) = (x - 3)(2x + d)$. Pour déterminer d, il suffit de développer cette expression et de l'identifier à la forme développée que nous connaissons :

$f(x) = (x-3)(2x+d) = 2x^2 + dx - 6x - 3d = 2x^2 + \mathbf{(d-6)}x - \mathbf{3d}$.

Mais on a aussi $f(x) = 2x^2 - \mathbf{4}x - \mathbf{6}$, ce qui nous permet, par identification des coefficients des deux écritures, de dire que $\mathbf{d - 6 = -4}$, ou que $\mathbf{-3d = -6}$. Dans les deux cas, on obtient $d = 2$, ce qui nous permet de dire que

$$f(x) = (x-3)(2x+2).$$

2°) Avec les deux racines connues :

Propriété :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

Si x_1 et x_2 sont des racines de f, alors f une forme factorisée de f est : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (a est le même que dans la forme développée).

Exemple :

D'après la forme factorisée trouvée à l'exercice précédent, on en déduit facilement que 3 et –1 sont les racines de $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$, et donc qu'une forme factorisée de f est $f(x) = 2(x - 3)(x + 1)$.

Conséquence :

Les fonctions polynômes de degré 2 s'annulant en deux réels x_1 et x_1 sont donc les fonctions qui peuvent s'écrire de la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Si l'on veut déterminer a, il suffit de connaître l'image d'un autre nombre par f.

Exemple : (voir aussi la vidéo capacité 1 p 11)

Question :

Quelle est la fonction polynôme de degré 2 s'annulant en –1 et 5 et pour laquelle l'image de 2 est 3 ?

Réponse :

–1 et 5 sont donc les racines de f, qui peut donc s'écrire, sous la forme factorisée, $f(x) = a(x + 1)(x - 5)$.

Nous savons de plus que $f(2) = 3$, soit $a(2 + 1)(2 - 5) = 3 \Leftrightarrow -9a = 3$, donc $a = -\frac{1}{3}$.

La fonction f cherchée est donc $f(x) = -\frac{1}{3}(x + 1)(x - 5)$.

III. Somme et produit des racines d'un trinôme du second degré :

Propriété :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

Si f possède deux racines réelles x_1 et x_2, alors :

Le produit des deux racines est $p = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$;

Et la somme des deux racines est $s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

Preuve :

Si f admet x_1 et x_2 pour racines, elle peut donc s'écrire $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

En développant cette expression, on obtient :

$f(x) = a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$.

Et comme $f(x) = ax^2 + bx + c$, en identifiant les coefficients des deux écritures, on obtient :

$a(x_1 + x_2) = b$, soit $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $ax_1x_2 = c$, soit $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Remarque :

Cette propriété permet, par exemple, de trouver la deuxième racine quand on en connaît une.

Exemple :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x - 2$. Nous constatons que 2 est une racine « évidente ». Si on appelle x_0 la seconde racine, on a alors :

$p = 2x_0 = \frac{c}{a} = -2$ et $s = 2 + x_0 = -\frac{b}{a} = 1$. Chacune de ces deux égalités nous permet de trouver $x_0 = -1$.

Remarque :

Il est inutile d'utiliser s **et** p pour déterminer l'autre racine, l'un des deux suffit.

Remarque :

Le produit et la somme des racines nous donne également des informations sur le signe des racines.

Exemple :

Si $f(x) = x^2 - 10x + 3$, $p = \frac{c}{a} = 3$. Les deux racines ont un produit positif, elles sont donc toutes les deux du même signe. De plus, $s = -\frac{b}{a} = 10$. Leur somme étant positive, les deux racines sont également positives.

IV. Étude du signe d'une trinôme du second degré à partir de sa forme factorisée :

1°) Méthode 1 :

Propriété :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, avec $a \neq 0$.

On peut déterminer le signe de f en étudiant le signe de chacun de ses facteurs puis en utilisant la règle des signes. Pour cela, on dresse un tableau dans lequel le signe de chacun des facteurs apparaît sur une ligne. Le signe du produit s'obtient sur la dernière ligne en appliquant la règle des signes.

Exemple 1 :

Étudions le signe de $f(x) = 3(x + 1)(x + 6)$.

$x + 1$ s'annule en -1 et $x + 6$ en -6

(on résout « $x + 1 = 0$ » et « $x + 6 = 0$ »)

x	$-\infty$		-6		-1		$+\infty$
3		+		+			+
$x + 1$		–		–	0	+	
$x + 6$		–	0	+			+
$f(x)$		+	0	–	0	+	

Exemple 2 :

Étudions le signe de $f(x) = -2(x - 1)(x + 5)$.

$x - 1$ s'annule en 1 et $x + 5$ en -5.

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
-2		–		–		–	
$x - 1$		–		–	0	+	
$x + 5$		–	0	+		+	
$f(x)$		–	0	+	0	–	

2°) Méthode 2 :

Propriété :

Pour déterminer le signe d'une fonction polynôme de degré 2, sous forme factorisée, on peut se servir de l'allure de sa courbe. Comme on a la forme factorisée, on trouve sans problème les racines du polynôme, c'est-à-dire les abscisses auxquelles la courbe coupe l'axe des abscisses. Il suffit ensuite de regarder le signe de a pour savoir si sa parabole représentative est tournée « vers le haut » ou « vers le bas », ce qui nous indiquera si la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses entre les racines ou non, et donc si la fonction est positive entre les racines ou non.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x + 2)(x - 5)$. Ses racines sont -2 et 5 et $a = 2$. La parabole représentant f est donc orientée vers le haut ($\cup$, voir ***I.*, 3°)**), f est donc négative sur $[-2 ; 5]$ et positive ailleurs, c'est-à-dire sur $]-\infty ; -2] \cup [5 ; +\infty[$.